

# LA HUMANIDAD DE LOS NÚMEROS

Antonio J. Durán

Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla

ARBOR Ciencia, Pensamiento y Cultura  
CLXXXIII 725 mayo-junio (2007) 373-381 ISSN: 0210-1963



**ABSTRACT:** *This paper is an account on the first steps in the relationship of the mankind with the numbers, but including also how the numbers were used to order so different and important aspects as the trade or the calendar.*

**KEY WORDS:** *History of numbers, arithmetic.*

**RESUMEN:** En el artículo se pasa revista a las primeras andanzas de la humanidad con los números, hasta mostrar como estos acabaron imponiendo su orden en asuntos tan diversos y fundamentales como el comercio o la elaboración del calendario.

**PALABRAS CLAVE:** Historia de los números, aritmética.

*Juntó una piedrecita  
con otra, un trueno  
con un trueno,  
un águila caída  
con otra águila,  
una flecha con otra  
y en la paciencia del granito  
una mano  
hizo dos incisiones, dos heridas,  
dos surcos: nació el  
número.*

Pablo Neruda.

**Una mano hizo el número**

## 1. UN POEMA A MANERA DE INTRODUCCIÓN

El poema de Neruda *Una mano hizo el número*, que abre este artículo, continúa así:

Creció el número dos y luego  
el cuatro:  
fueron saliendo todos  
de una mano:  
el cinco, el seis,  
el siete,  
el ocho, nueve, el cero,  
como huevos perpetuos  
de un ave  
dura  
como la piedra,

que puso tantos números  
sin gastarse, y adentro  
del número otro número  
y otro adentro del otro,  
prolíferos, fecundos,  
amargos antagónicos,  
numerando,  
creciendo  
en las montañas, en los intestinos,  
en los jardines, en los subterráneos,  
cayendo de los libros,  
volando sobre Kansas y Morelia,  
cubriéndonos, cegándonos, matándonos  
desde las mesas, desde los bolsillos,  
los números, los números,  
los números.

No sé a ustedes, pero a mí me sugiere el poeta con sus versos esa propiedad intrínseca de los números (naturales) de ir uno detrás de otro desde un comienzo que Neruda, de forma tan poética como coherente con la historia, sitúa en la mano y no en el cero. Sin mencionarse siquiera, se entrevé en el poema esa infinitud de los números que tanto obsesionó a Borges. Un poema, en fin, que, alargando la metáfora, bien podría pasar como álgter ego literario de los más técnicos axiomas de Peano y que sitúa los comienzos de la relación humana con los números –la humanidad de los números– lejos, muy lejos en el tiempo...

## 2. DE LA MANO QUE CUENTA A LA MANO QUE ESCRIBE

### Aprendiendo a contar

Tengo para mí que las representaciones de manos humanas en cuevas paleolíticas del norte de España y sur de Francia –“en la paciencia del granito” que decía el poeta– son un vestigio del esfuerzo intelectual que llevó a nuestros antepasados cavernícolas a discernir e individualizar el número 3 del 5 o del 4. De ser mi presunción cierta, haría de la pintura y la aritmética una especie de Rómulo y Remo que la creatividad humana encontró al final de las manos y amamantó juntos antes incluso de que aprendiéramos a enterrar a nuestros muertos. Las manos nunca han dejado de ser una herramienta privilegiada para relacionarnos con los números –y obviamente para pintar–: los niños siguen usando los dedos para iniciarse con los números, primero para mostrar y reconocer su edad cuando apenas saben hablar y después, ya en la escuela, para aprender a sumarlos y restarlos.

Probablemente, en aquellas épocas olvidadas del Paleolítico no hicieron falta muchos números para llevar la cuenta de la caza y la recolección. Tal vez la presencia de esos primeros números entre nosotros siquiera requirió de palabras para nombrarlos y bastara entonces con algunos signos que, sin duda, tuvieron a las manos por protagonistas. Eco de tales usos encontramos hoy en algunas tribus de Oceanía, África y América, donde el nomenclátor de los números es despachado con nombres para el 1, 2 y 3, más allá de los cuales apenas se matiza con palabras como “algunos” y “muchos”; sin embargo, esas mismas

tribus cuenta con procedimientos aritméticos corporales, articulados en torno a los dedos de las manos y, a veces también de los pies, que les permiten contar sin palabras hasta más allá de la treintena.

La necesidad de números creció conforme los cazadores fueron convirtiéndose en pastores; y en pastores eficientes que hacían crecer y crecer el número de cabezas de sus rebaños. Debió de ser en esa trasumancia de oficios cuando los números fueron bautizándose de manera masiva y desarrollándose las primeras argucias para ayudarse en una incipiente y necesaria contabilidad. Así se empezaron a hacer los surcos e incisiones en huesos y bastones de madera que menciona Neruda en su poema, y a usarse cálculos, cuentas y piedrecitas –“huevos perpetuos de un ave dura como la piedra”–. Sin duda entonces la humanidad empezó a agradecer lo “prolíferos y fecundos” que son los números, capaces de proveer y proveer sin fin ni aparente cansancio, fertilidad esta en la que hoy, tal vez por habernos acostumbrado a ella, apenas se repara.

### Aprendiendo a escribir

Pero cuando la humanidad empezó realmente a depender de los números fue cuando, además de con pastores, empezó a contar entre sus huestes también con agricultores. La agricultura tuvo como efectos colaterales –que decimos hoy– el sedentarismo, el comercio y la necesidad de conocer mejor el ciclo de las estaciones, esto es, el calendario.

La vida empezó entonces a complicarse y hubo que inventar la escritura –y, en consecuencia, la lectura– para hacerla algo más llevadera. Con toda seguridad, los números están en el origen de la escritura. Los registros escritos más antiguos conservados, en tablillas de arcilla que se remontan al año 3000 a.C. o incluso algo antes, contienen primitivos diseños numéricos sumerios y operaciones aritméticas sobre intercambios comerciales. Estos intercambios eran presumiblemente trueques, y en las tablillas constan las cantidades y los productos –cebada, por ejemplo– intercambiados.

Todo esto sugiere razonablemente que el comienzo de la escritura bien pudo ser como sigue. Situémonos en alguna aldea del sur de Mesopotamia –pongamos Uruk, o Elam, si se prefiere más precisión– a mediados del IV milenio a. C.,

cuando todavía la humanidad no sabía escribir. Una familia ha enviado a uno de sus miembros para que compre cabras en una aldea vecina –o cierta cantidad de trigo y cebada, tanto da–. La familia, y esto es lo importante, quiere tener la seguridad de que el enviado va a traer a la casa familiar tantas cabras como le fueran vendidas. Para ello, el vendedor guarda en un recipiente sellado de arcilla una piedrecita por cada cabra vendida, de manera que cuando las cabras lleguen a la familia compradora se pueda comprobar que hay tantas cabras como piedras en la vasija. En cierto momento, a alguien se le ocurrió presionar contra el recipiente de arcilla fresca las piedras que iba metiendo dentro, de manera que al volverlas a sacar encajaran fuera y se tuviera mayor seguridad de que el contenido de la vasija de arcilla no había sido manipulado. Después, otro alguien se dio cuenta de que, una vez marcadas fuera, ya no era necesario meter las piedras dentro del recipiente. Precisamente con esas marcas empezó la representación de los números y, a la par, la escritura empezó a ser engendradora. Puesta de manifiesto la manera de representar un número, el siguiente paso fue representar el objeto al que ese número hacía referencia. Porque además de comprar cabras, aprovechando el desplazamiento también se compraban ovejas, y no en igual número. De manera que había que señalar que el número 10, pongamos por caso, se refería al número de cabras compradas, mientras que el 15 hacía referencia al de ovejas; para lo cual nada mejor que añadir al lado de las marcas para el 10 un signo que se convino viniera a significar cabra, y al lado de las marcas para el 15 otro distinto que iba a significar oveja. Con el transcurso del tiempo, esos primeros signos, presumiblemente simples pictogramas para representar objetos, pasaron a representar sonidos, bien palabras o bien sílabas, evolucionando además al diseño cuneiforme –hacia el 2500 a. C.–, más fácil de imprimir sobre arcilla.

Este proceso que antepone por poco la representación escrita de números a la escritura en sí, y todo ello teniendo como motor al comercio –más o menos primitivo o incipiente–, es bastante universal. Se ha producido a todo lo largo y ancho de la geografía y la historia humanas, desde Mesopotamia, Egipto o China –donde la contigüidad espacial puede explicar la similitud del proceso–, hasta Mesoamérica –cuyo aislamiento geográfico de esas civilizaciones (y también la discontinuidad temporal) quiebran toda posible influencia–. Los efectos del comercio en los números no quedaron ahí, como podrá comprobar quien

continúe con la lectura; fue la revolución comercial vivida en la Europa medieval, origen del moderno capitalismo que acabaría convirtiéndola en la potencia dominadora del mundo, la que acabó haciendo triunfar nuestro actual sistema de numeración –de origen hindú, como es bien conocido– sobre el romano, todavía en uso entonces por estos lares.

### 3. NÚMEROS PARA PONER ORDEN EN LAS COSAS DEL CIELO...

El progreso de la agricultura –imprescindible (además de causa) para sostener las altas densidades de población asentadas en las ciudades– requirió conocer, con cuanta más precisión mejor, cómo se sucedían las estaciones a lo largo del año, empezando, naturalmente, por determinar cuántos días tenía ese año y cuántos las estaciones de que se componía. Esta curiosidad interesada por predeterminedar el ciclo solar y poder así sacar el correspondiente rendimiento al conocimiento preciso de los ciclos de siembra y recolección mostró la necesidad de disponer de calendarios fiables. Para estas sofisticaciones que la civilización necesitaba para progresar, son imprescindibles los números, las cuentas y otras orgías y manipulaciones que con ellos se pueden hacer. No ha habido, de hecho, cultura que haya controlado –de forma más o menos precisa– el calendario que no haya desarrollado a la par un sistema eficiente para representar y hacer operaciones con los números.

Ese fue de hecho, el caso de sumerios y babilonios: la base 60 que usaron para escribir los números –cuya herencia es todavía hoy perceptible en su uso para medir el tiempo o los ángulos–, puede plausiblemente haber tenido su origen en la astronomía, toda vez que el número 60 –y sus partes y múltiplos– es especialmente adecuado para medir, en una primera aproximación, buena parte de las divisiones temporales relacionadas con el ciclo solar y, por ende, del calendario. Dividir la circunferencia en 360 grados, como seguimos hoy haciendo por influencia babilónica, equivale a asignar al grado el valor angular recorrido –más o menos– por el sol en la eclíptica durante un día.

Los babilonios fueron grandes astrónomos y astrólogos. Y la sofisticación alcanzada por su sistema de numeración debe mucho a la necesidad que sintieron de ordenar el

calendario y a la fascinación por las artes mágicas y adivinatorias que asociaron con los cuerpos celestes.

El calendario tuvo casi la misma importancia en la vecina civilización egipcia y, por tanto, la astronomía y los cálculos numéricos asociados. Egipto debe su ser a la inundación anual del Nilo. Esta inundación había que saber predecirla convenientemente; primero para evitar los daños y después porque había que tener todo listo para la siembra.

Digamos que la clave para determinar un buen calendario radica en el mejor o peor conocimiento que tengamos de la duración exacta del año trópico –esto es, el tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos del sol por el mismo punto equinoccial; luego está el año sidéreo: el tiempo que tarda el sol en volver a pasar sobre el fondo de una misma estrella; la relación entre ambos, teniendo en cuenta estimaciones actuales, es de 0'999961123...-. Los calendarios sumerios y babilónicos usaban una estimación de 360 días, muy cómoda para su sistema sexagesimal, pero que acumulaba en pocos años semanas y semanas de imprecisión que había que corregir para hacer viable su uso. Los egipcios mejoraron la estimación adoptando 365 días para la duración del año que dividieron en 12 meses de 30 días, más 5 días agrupados al final del año –su calendario les dio para cierto lucimiento: basta si no ver la cara de pasmo de los turistas cuando, el primer día del verano, ven en las profundidades de un templo egipcio al último rayo del sol poniente besar la frente de un faraón–.

El problema es que el año trópico no se puede medir exactamente en días, de hecho la estimación egipcia suponía un desfase de 10 días cada cuarenta años, aproximadamente.

La magnitud de ese error motivó la creación del calendario Juliano, vigente hasta finales del siglo XVI. El calendario Juliano se elaboró basándose en los cálculos del astrónomo griego Socígenes de Alejandría que estimaban para el año trópico una duración de 365 días y 6 horas. De esta manera el emperador Julio César decretó en 46 a.C. que tras cada tres años de 365 días seguiría uno de 366 –el año bisiesto, que acumulaba en un día las seis horas de desfase de cuatro años consecutivos–.

Otra civilización donde los números y la astronomía alcanzaron sofisticaciones, que siguen hoy sorprendiendo,

floreció un par de milenios más tarde que babilonios y egipcios y bastantes miles de kilómetros y todo un océano más al oeste. Se trata de los mayas, que convirtieron en religión la medida del tiempo y su transcurrir; quizá porque ese transcurrir permite la continuidad y el suceder de la vida. Probablemente fuera la agricultura –en este caso del maíz– la impulsora de esa pasión por medir el tiempo, tan determinada y hasta contaminada por influjos religiosos.

Naturalmente, para el estudio y la predicción astronómica, los mayas necesitaron de los números. Desarrollaron de hecho varios sistemas de numeración. Uno más primitivo basado en el principio aditivo –similar, por tanto, a la numeración romana–; y otro mucho más sofisticado, similar al nuestro actual aunque con base 20, siguiendo por tanto el principio de posición y el uso del cero. En este caso los números se representaban por glifos, en su mayor parte rostros humanos o humanoides, algunos de inusitada fiereza, otros más dulces y relajados. Estos símbolos para los números conforman una singular galería de dioses que nos recuerda, una vez más, el carácter religioso de la escritura y los cálculos mayas.

Todo esto les permitió elaborar unos afinados calendarios astronómicos con predicción de eclipses, ciclos lunares y fases de Venus, Mercurio y Marte, pero también otros más extravagantes con presagios astrológicos.

Además de dos sistemas de numeración, los mayas también dispusieron de dos calendarios. Uno ritual llamado *tzolkín* con 260 días agrupados en 20 nombres o días del mes y 13 números. Los mayas erigieron por toda Mesoamérica una red de impresionantes centros ceremoniales, muchos de los cuales todavía se conservan hoy en mejor o peor estado: *Uxmal* y *Chichén Itzá* en Yucatán, *Palenque* en Chiapas, *Tikal* en Guatemala y *Copán* en Honduras, etc. El calendario *tzolkín* era fundamental para fijar las fiestas y rituales religiosos celebrados en estos grandes centros de ceremonias, donde no fueron extraños los sacrificios humanos.

Los mayas también tuvieron un calendario solar llamado *Haab* con 365 días divididos en 18 meses –*uinal*, en legua maya– de 20 días, más 5 días extras a los que llamaban *uayeb*, o "aquellos que no tienen nombre". Los nombres de los días estaban cargados de significado para los mayas, de ahí que esos *uayeb* al carecer de nombre fueran días de mala suerte.

Atendiendo a estos dos calendarios, cada día recibía dos nombres, cada uno de los cuales estaba formado por el nombre del mes y el nombre del número correspondiente. Para los mayas tenía especial significado el lapso de tiempo necesario para que los nombres y números de los días volvieran a repetirse en ambos calendarios. Un simple cálculo muestra que esto sucedía cada 18.980 días, esto es, cada 52 *haab* del calendario solar –descontados los *uayeb*– o, simultáneamente, cada 73 *tzolkín* del calendario ritual.

En su obsesión por el calendario los sacerdotes mayas se distinguían poco de sus colegas católicos –a uno de cuyos conspicuos ejemplares se debe la quema de buena parte de los espléndidos códices mayas porque, según escribió, “no tenían cosa en que no hubiese superstición y falsedades del demonio”–. Y es que la Iglesia católica ha sido una de las tantas religiones que ha sentido verdadera fijación por ligar sus fiestas rituales al sol y la luna. A esa obsesión se debe precisamente nuestro calendario actual. El calendario Juliano fue adoptado por la Iglesia católica en el Concilio de Nicea –325 d. C.–. Ahora bien, teniendo en cuenta los datos actuales, la duración del año trópico es unos 11 minutos menor a la estimación de Socígenes adoptada por Julio César, esto es, el error acumulado por el calendario Juliano añadía un día de más cada 132 años. Los días de más, acumulados, suponían un problema para la determinación de fechas religiosas importantes para la Iglesia católica –la de la Pascua y otras fechas litúrgicas móviles que dependen del equinoccio de primavera–: piénsese que cuando el calendario indicaba el 21 de marzo en un año cualquiera del siglo XVI, era, en realidad, el 11 de marzo –diferencia ya apreciable toda vez que el auténtico 21 de marzo, supuestamente el equinoccio de primavera, la duración del día y la noche debería ser idéntica–; precisamente este problema apareció en la dedicatoria que Copérnico hizo de su *De revolutionibus* al Papa Pablo III como la más importante de las razones que le llevaron a abordar su reforma de la astronomía ptolemaica: “porque los matemáticos están tan inseguros sobre los movimientos del Sol y de la Luna, que no pueden ni demostrar ni observar la duración constante del año estacional”.

Después de siglos postergando la reforma, esta culminó finalmente en 1582, bajo mandato del Papa Gregorio XIII –de ahí el nombre de calendario Gregoriano con el que es conocido– y la dirección de los astrónomos del jesuita *Collegio Romano*. Se estipuló para la duración del año 365

días, 5 horas, 48 minutos y 46 segundos y se dictaminó recuperar los diez días de desfase –se pasó del 5 de octubre de 1582 al 15 de octubre– y convertir 3 años bisiestos en normales cada cuatro siglos –concretamente, de los años terminados en 00 serán bisiestos aquellos cuyas cifras de centenas y millares sean múltiplo de cuatro: así, 1700, 1800 y 1900 no fueron años bisiestos, mientras que el 2000 sí lo fue–.

Ya ven, detrás de los dioses casi siempre hay un número y, como dijo el poeta, adentro del número otro número y otro adentro del otro, prolíferos, fecundos...

#### 4. ... Y EN LAS TERRENAS

Se da también la circunstancia de que cuando una sociedad humana ha llevado los intercambios comerciales entre sus miembros más allá del trueque ha necesitado, y por tanto ha desarrollado por sí, o copiado de otros, sistemas más o menos sofisticados para manejar los números. Ocurrió así en Babilonia, Egipto, India, China, Mesoamérica, etc.

A esta asociación de comercio y aritmética, precisamente, se debe la difusión por occidente de nuestro actual sistema de numeración. A menudo se piensa que fueron las necesidades matemáticas las que obligaron a desarrollar y difundir nuestro actual sistema de numeración, y que esas mismas necesidades matemáticas acabaron haciéndolo de uso universal. Nada más falso y alejado de la realidad histórica, hasta el punto de que sin incurrir en exageración alguna se puede afirmar que nuestro sistema de numeración ha sido un regalo que los matemáticos han recibido de la sociedad; y si se quiere algo más de precisión, sustitúyase *sociedad* por *comerciantes, mercaderes y banqueros*. Me explico.

Como es bien sabido nuestro actual sistema de numeración es de origen hindú y cuajó durante el período de esplendor cultural e intelectual que tuvo lugar en todo el valle del Ganges desde mediados del siglo III d.C. hasta mediados del siglo VI d.C. –dinastía de los Gupta–, coincidiendo con una fuerte expansión comercial, tanto con el Oriente próximo, como con Bizancio –no por casualidad se inició y desarrolló en esa época la gran astronomía trigonométrica hindú de clara influencia griega–.

Poco a poco, los matemáticos hindúes fueron dominando los números en general y, en particular, el cero. Así, Brahmagupta en torno al 628 explicó el cero como el resultado de restar un número de sí mismo; también usó los números negativos, que los griegos habían evitado y que luego llevaría muchos siglos introducir y hacerlos de uso común en Europa. Mahavira en torno al año 1000 estableció claramente las reglas para el uso del cero en las operaciones: un número multiplicado por 0 da como resultado 0, mientras que un número menos cero es igual al mismo número. Por último Baskhara hacia el 1114 estableció que un número dividido por cero es igual a infinito.

Para escribir las diez cifras a partir de las cuales se puede representar cualquier número, los hindúes tuvieron la buena idea de no usar letras de su alfabeto. Usaron símbolos que derivaban de la escritura brahmi, surgida en el siglo III a.C. para escribir el sánscrito. Las cifras brahmi evolucionaron y se diversificaron dando lugar en el siglo IV y V a las cifras Gupta y a partir del siglo VII a las nagari, que fueron precisamente las que tomaron inicialmente los árabes.

Tras su conversión al Islam en el siglo VI, los árabes iniciaron una expansión hacia el Oriente que los llevó a territorio hindú. A través de esa frontera se filtró el sistema hindú de numeración, de forma que ya a finales del siglo VIII los musulmanes lo habían asimilado.

Del primer cuarto del siglo IX data una de las mejores aritméticas que los árabes compusieron. Su autor fue Al-Jwarismi o Al-Khwarizmi (780-850), el gran matemático y astrónomo árabe, uno de los padres del álgebra. Al-Jwarismi trabajó en Bagdad en la *Casa de la Sabiduría*. Esta institución fue creada por Al Mamún, el gobernador que aparece en las *Mil y una noches*, para el conocimiento y desarrollo de la filosofía, la astronomía, las matemáticas y otras ciencias. El libro de aritmética de Al-Jwarismi lo conocemos por una versión latina del siglo XIII, pues no se ha conservado en su versión árabe. En él se explica la forma de representar números usando el sistema y las cifras hindúes, y la forma de hacer las cuatro operaciones –suma, resta, multiplicación y división–.

La forma de representar los números que los árabes aprendieron en el Oriente circuló hasta la otra punta de sus dominios; y así, a través del norte de África, el sistema de numeración hindú llegó a España en el siglo IX. El diseño

de las 10 cifras que los árabes nos trajeron a Occidente deriva directamente de las cifras *nagari* de los hindúes, aunque adaptadas a la caligrafía árabe.

Estas fueron precisamente las cifras que el monje Vigilán escribió en su monumental *Codex Vigilanus*, compuesto en el desaparecido monasterio de San Martín de Albelda en La Rioja hacia el año 976. Es posible que el monje Vigilán aprendiera esa forma de escribir los números en el monasterio de Santa María de Ripoll, cerca de Vic. Lo que ilustra el esfuerzo de los monjes cristianos del noreste de la península por asimilar la cultura científica de Al-Andalus y su transmisión posterior al resto de Europa. Unos años antes de que Vigilán visitara Ripoll, allí aprendió los números Gerberto de Aurillac, que después sería papa con el nombre de Silvestre II. Gerberto fue quien primero impulsó la introducción en Europa de los numerales árabes, aunque como parte de un nuevo tipo de ábaco que usaba el principio posicional aunque no el cero, innecesario en un ábaco.

Aunque se conservan en el Oriente –India principalmente– diversos registros anteriores al *Codex Vigilanus* donde se usan signos con cierto parecido con nuestras cifras para indicar una fecha o las dimensiones de un templo –es el caso de unas lápidas en los templos de Gwalior datadas el año 876–, es el *Codex Vigilanus* el documento más antiguo de cuantos se conservan que, mencionando de manera explícita los números, reproduce las 9 cifras –no aparece el 0– en forma muy parecida a como hoy lo hacemos.

Pues bien, desde que a finales del siglo X cuando Vigilán incluyó esa mención a los números hindúes en su *Codex* –y Gerberto de Aurillac los llevó al otro lado de los Pirineos– hasta que la aritmética hindú se hizo de uso prácticamente universal en Europa bien entrado el Renacimiento, pasaron quinientos años en los que con los números no se hicieron matemáticas sino que sirvieron de manera esencial para el desarrollo del comercio. Así no es de extrañar que la figura cumbre de la aritmética medieval fuera Fibonacci, hijo de comerciantes y comerciante él mismo.

Durante esos cinco largos siglos se produjo en Europa una batalla entre *algoristas*, esto es, aquellos que usaban para las cuentas el sistema hindú de numeración y los numerales árabes, y *abacistas*, esto es, aquellos que hacían las cuentas con el viejo sistema romano mejora-

do con artilugios como el ábaco, o las mesas de cálculo. Lo que al inicio del Renacimiento vino a decantar la victoria del lado de los *algoristas* frente a los *abacistas* fueron, ni más ni menos, las necesidades contables que el desarrollo del comercio durante la baja Edad Media había generado.

Cuando la actividad comercial empezó a transformarse en Europa a partir de los siglos XII y XIII, la simplificación de las operaciones aritméticas que permite el sistema hindú se tornó imprescindible. Ocurrió entonces que los mercaderes dejaron de acompañar a las caravanas, se hicieron sedentarios, asentaron los negocios en sus ciudades y establecieron sucursales en la ruta, creando así vastas redes comerciales de intercambio. Todo ello propició la creación de las primeras entidades bancarias con instrumentos comerciales más complicados como las letras de cambio. Esta transformación, fundamental para la expansión del comercio, generó una contabilidad mucho más complicada que requirió entonces de los poderosos métodos de cálculo que la aritmética hindú permite.

Imagine el lector a un comerciante veneciano, o genovés o florentino, mercadeando con Bizancio, con el Mediterráneo árabe e incluso con China, llevando esclavos, vino, sal o paños y trayendo especias, seda, trigo o porcelanas.

Imagine que ya de Venecia a Génova o Florencia la forma de medir y pesar las mercaderías era distinta. Variaban también las monedas que cada república o reino acuñaba y fundía con aleaciones elegidas a su gusto o provecho.

Y si esto, digo, era así entre repúblicas vecinas, imagínese ahora el lector lo que no ocurriría con los pesos, las medidas y las monedas de un lado al otro del Mediterráneo y más lejos todavía hasta llegar a la India o la China. Añádase a esto los distintos aranceles y tasas aplicados por unos y por otros, aquí y allá. ¿Quién sino los números y la aritmética podían poner orden donde tanto caos y minucias contables se acumulaban?

Esta es la sencilla razón que hizo que el sistema hindú arraigara antes en el norte de Italia o en las ciudades de la Hansa que en otras regiones de Europa. La zona hanseática dejó además una marca todavía hoy reconocible en la aritmética.

En la Hansa los abanderados de los números fueron los *rechenmeisters*, o maestros calculistas: funcionarios encargados por la respectiva ciudad de la contabilidad, sobre todo la relativa a la organización de los puertos, salida y entrada natural del comercio entre las ciudades de la liga. Los *rechenmeisters* escribieron muchas de las aritméticas impresas en Alemania durante el primer siglo de la imprenta, y fueron los inventores de buena parte de los símbolos que hoy usamos para representar las operaciones de la aritmética: es la marca a la que me refería arriba. ¿Cómo expresar mediante símbolos que dos números van a ser sumados, multiplicados o divididos? Ya los babilonios y egipcios habían inventado ideogramas para indicar cuando dos cantidades se sumaban o restaban. Especialmente gráfico era el signo egipcio: un par de piernas caminando hacia delante indicaban una suma y caminando hacia atrás una resta. En las primeras aritméticas mercantiles publicadas en el Renacimiento se optó por declarar con palabras la operación que se iba a hacer con los números. Pero este exceso retórico era engorroso y confuso. En Italia y otros países se optó, desde finales del siglo XV hasta principios del XVII, por indicar las operaciones mediante abreviaturas: así, la letra tildada *p*, inicial de *plus* y la *m*, inicial de *minus*, se usaron para señalar sumas y restas, respectivamente, y una *r* era el signo habitual para la raíz cuadrada. Pero fueron los *rechenmeister* de la Hansa quienes mostraron más imaginación en el diseño de los símbolos de la aritmética. Mientras cuadraban balances contables en sus oscuras oficinas de los muelles, cayeron en la cuenta de que para indicar sumas y restas acaso pudieran servir aquellos signos usados en el puerto para indicar excesos o mermas en los pesos de las cajas y embalajes. Estos símbolos no eran otros que la cruz + para indicar un exceso y el guión – para indicar una merma. Así, algunos *rechenmeister* empezaron a usar esos símbolos hacia el final del siglo XV para indicar con el + una suma y con el – una resta. Primero los usaron en textos manuscritos; después los símbolos pasaron a la imprenta y acabaron con el tiempo haciéndose universales.

La intensa relación que mantuvieron el comercio y la aritmética hindú escrita con cifras árabes quedó reflejada en el Renacimiento con la impresión, nada más desarrollada la imprenta, de numerosas aritméticas mercantiles. Estos libros, más que de matemáticas lo eran de cuentas, y además de enseñar la aritmética, contenían multitud de ejemplos útiles para usos contables: cambio de monedas,



cálculo de aleaciones, de trueques, de repartos proporcionales, cálculo de precios y beneficios, problemas de finanzas, cálculo de intereses, e incluso, información sobre costumbres crediticias y letras de cambio en diferentes ciudades europeas. Referencia se ha hecho ya a las aritméticas publicadas en Alemania por los *reichenmeisters* –célebres son la de Johann Widman escrita en alemán y publicada en Leipzig en 1489, o la de Christoph Rudolff que vio la luz en Estrasburgo en 1525, y no digo por no hacer la lista demasiado larga– y sería imperdonable no hacer mención de la *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (1494), del italiano Luca Pacioli. La *Summa* fue la mayor síntesis matemática impresa en el siglo XV. De las cinco partes que contiene el libro, las que aquí me interesa reseñar son las dedicadas a la aritmética y, sobre todo, la llamada *De computis et scripturis*, dedicada a las aplicaciones mercantiles de la aritmética –dejo casi sin mencionar la parte dedicada a la *regla de la cosa* o *arte mayor*, que supuso ver impresos los primeros balbuceos del álgebra, a la que la aritmética fue abriendo camino desde ese estado primitivo llamado *regla de la cosa* hasta convertirse de manos de Vieta y Descartes en el álgebra simbólica: esa que todavía hoy asusta a la gente con su parafernalia de incógnitas  $x, y, z$  y ecuaciones sincopadas:  $x^2 + z^3 + 2xy = y^2x$ –. Acaso sea exagerado decir que con el *De computis et scripturis*, fray Luca Pacioli inventó la contabilidad moderna, aunque sea esta una exageración tan módica y esquelética que casi se puede considerar ecuánime. Quizá tanto como decir que su influencia ha llegado hasta el siglo XX, en parte ayudada por las 34 traducciones –a 14 lenguas– que *De computis et scripturis* ha tenido. El fraile Pacioli explicó en su libro la contabilidad de doble entrada, que venía usándose en Italia desde mediados del siglo XIV, convirtiéndola en contabilidad por partida doble –o veneciana–, esto es, se anotaban tanto abonos como cargos, o en otras palabras el activo y el pasivo o el haber y el debe; e incluía también los correspondientes ejemplos sobre cambio de monedas, medidas y pesos que Pacioli tomó de algunos manuscritos que circulaban entre mercaderes y comerciantes. *De computis et scripturis* es un magnífico y detallado tratado sobre la teneduría de libros contables y tal vez por eso haya sobrevivido activo muchos más siglos de los que acaso su autor llegara nunca a imaginar.

Puede compararse cualquiera de las aritméticas comerciales renacentistas con los *Elementos* de Euclides –impreso

por primera vez en Venecia en 1482–, donde, como dijo aquel, no se usan más números que los necesarios para numerar proposiciones y teoremas. Esta no-presencia de los números en los *Elementos* viene a reflejar que la matemática griega siempre había excluido de su mundo los cálculos numéricos, a cuyo arte dieron el calificativo de *logística*, quedando la palabra *aritmética* para denominar lo que hoy llamamos teoría de números. Los griegos consideraron las cuentas cosa más de comerciantes y negociantes que de filósofos y matemáticos –aunque hubo excepciones notables como fue el caso de Arquímedes–, lo que tal vez explique el penoso sistema de numeración que usaron –penoso en comparación con el de los hindúes–.

Así, cuando se empezó a hacer propiamente matemáticas con el sistema de numeración hindú –digamos a partir del descubrimiento de los logaritmos a principios del XVII–, los mercaderes, comerciantes y banqueros ya llevaban beneficiándose del invento varios siglos.

Coincidiendo con el desarrollo de la imprenta, un último y curioso beneficio le supieron arrancar los gremios del comercio y la banca a los números: esa profusión de libros de cuentas publicados en el Renacimiento fue usada por comerciantes y banqueros para mejorar su imagen pública. En efecto, en *La República*, Platón había catalogado como subalternos a los trabajadores manuales, comerciantes y artesanos incluidos, habiendo sido los números y las cuentas que estos practicaban expulsados, como se acaba de decir, del paraíso de las verdaderas matemáticas ejercidas por filósofos y matemáticos. Esta mala imagen no hizo sino agravarse cuando la mitología cristiana retrató a su líder expulsando a golpes a los mercaderes del templo. Así, durante la Edad Media, los oficios de comerciantes y mercaderes estuvieron contaminados por el oprobio que la práctica de la usura había arrastrado a lo largo de los siglos. Acaso el hecho de que se identificara a los usureros con los judíos había empeorado algo más las críticas sobre la moralidad de los prestamistas. Esta situación se mantenía todavía en los inicios del Renacimiento, lo que no dejó de reflejarse en las primeras aritméticas mercantiles. Así, para conjurar el pecado de avaricia, encontramos invocaciones a Dios, la Virgen o Jesucristo al inicio de las más antiguas aritméticas comerciales publicadas. Era una manera de exorcizar las posibles interpretaciones torcidas que se pudieran hacer de los cálculos de intereses y ganancias. Esta situación fue cambiando conforme avanzaba el



siglo XVI, y acaso el hecho de que algunos curas y frailes escribieran este tipo de aritméticas sirviera para relajar las consideraciones morales que cupiera hacer, por más que estos autores procedieron en sus libros sin parar mientes en si los cálculos de precios que proponían podían considerarse justos o no, o si los intereses calculados entraban o no en la usura, o si los beneficios computados caían o no dentro del pecado de avaricia. El tratamiento aséptico de los asuntos contables que la aritmética permitía, sobre todo en lo relativo a préstamos y cálculo de beneficios y ganancias, ayudó también a superar las connotaciones amorales de estos oficios. La publicación de las aritméticas mercantiles sirvió finalmente para mejorar la apreciación social de mercaderes y comerciantes. Una parte del prestigio social que tenía el libro en el Renacimiento acabó trasvasándose a esos gremios que eran, a fin de cuentas, los usuarios y, en cierta forma, protagonistas de los textos. La mejor consideración del dinero, propiciada por el incipiente capitalismo renacentista, acabó permitiendo el ascenso en la jerarquía social de determinados oficios y actividades manuales. Así, ese matrimonio de convenien-

cia que formaron la aritmética y el comercio acabó, para beneficio de mercaderes y banqueros, siendo sellado y confirmado por la imprenta.

Hasta tal punto gozaron de buena reputación los libros de cuentas que no era raro verlos aparecer en cuadros y retratos como elementos de prestigio: es el caso de Luca Pacioli que prefirió hacerse un retrato, no orando ni meditando, ni tan siquiera enseñando las verdades reveladas del evangelio, sino las verdades demostradas de los *Elementos* de Euclides; además, contra lo que ordena la regla franciscana, Pacioli exhibía ostentosamente lo que acaso fuera una de sus más preciadas posesiones: en su retrato aparece, cerrado, la *Summa de arithmetica*. Y no fue el único: Hans Holbein el joven, incluyó en su composición *Los embajadores* un ejemplar –entre otros libros– de la aritmética mercantil escrita por Pedro Apiano.

Si alguna prueba más hacia falta, sirvan estos retratos de libros de cuentas para mostrar cuánta humanidad cabe en los números.

#### BIBLIOGRAFÍA

- Cajori, F. (1928): *A history of mathematical notations*, The Open Court publishing company, Chicago.
- Calvet, L. J. (2001): *Historia de la escritura*, Paidós, Barcelona.
- Davis, N. Z. (1960): "Sixteenth-century French arithmetics on the business life", *Journal of the History of Ideas*, 21, 18-48.
- Durán, A. J. (dir.) (2006): *Vida de los números*, T ediciones, Madrid. 2.ª premio del Ministerio de Cultura al libro mejor editado en España, 2006 (Obras generales y de divulgación).
- Durán, A. J. (dir.) (2000): *El legado de las matemáticas*, Catálogo de la Exposición, Consejería de Cultura y Universidad de Sevilla, Sevilla.
- Haarmann, H. (2001): *Historia universal de la escritura*, Gredos, Madrid.
- Ifrah, G. (1997): *Historia Universal de las cifras*, Espasa Calpe, Madrid.
- Kline, M. (1992): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Alianza Editorial, Madrid.
- Landa, Diego de (1985): *Relación de las cosas del Yucatán*, Historia 16, Madrid.
- Robinson, A. (1996): *Historia de la escritura*, Destino, Barcelona.

**Recibido:** 19 de diciembre de 2006

**Aceptado:** 23 de diciembre de 2006