ARBOR Ciencia, Pensamiento y Cultura
Vol. 187 - Extra 3 - diciembre (2011) 279-284 ISSN: 0210-1963
doi: 10.3989/arbor.2011.Extra-3n3158

EL MATEMÁTICO COMO UN PROFESIONAL EN LOS RECORRIDOS DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN

THE MATHEMATICIAN AS A PROFESSIONAL IN THE TRAJECTORIES OF STUDY AND RESEARCH

C. Fonseca, J. M. Casas y M. A. Insua
Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo, ETSI de Telecomunicación, Campus As Lagoas Marcosende s/n, 36310 Vigo, teléf. 986812158, fax 986 81 21 16, cfonseca@uvigo.es, jmcasas@uvigo.es, ainsua@uvigo.es

ABSTRACT: *In this paper we describe a new didactic device: the trajectories of study and research (TSR). These didactic devices allow to articulate teaching and learning sequences.*

KEY WORDS: *Mathematical modelling; computer tool; trajectory of study and research.*

RESUMEN: En este trabajo se describe un nuevo dispositivo didáctico que estamos diseñando y completando, los Recorridos de Estudio e Investigación (REI), que quieren contribuir a crear secuencias de enseñanza-aprendizaje.

PALABRAS CLAVE: Modelización matemática; herramienta informática; recorrido de Estudio e Investigación.

1. Introducción

Uno de los problemas más acuciantes de la educación matemática actual consiste en la pérdida de sentido de las matemáticas escolares. Este fenómeno se manifiesta en múltiples formas, que van desde la falta de motivación de los alumnos para estudiar matemáticas y la consiguiente desorientación de los profesores, hasta la disminución progresiva del peso de las matemáticas en el currículo y su invisibilidad en la Sociedad. En esta misma línea, el informe Rocard como en Rocard, Csermely, Jorde, Walwerg-Henriksson y Hemmo, 2007 comenta que existe un descenso alarmante en el interés de los jóvenes por los estudios de las ciencias y de las matemáticas, este descenso lo relaciona con una forma demasiado abstracta de enseñarlas en Secundaria. En la enseñanza de las matemáticas no siempre está presente la "razón de ser" de la actividad matemática que se estudia, en particular, es muy difícil que se dé sentido a la actividad matemática cuyo estudio se inició en la Enseñanza Secundaria y que se retoma en la Universidad. La Razón de Ser de la actividad matemática está fuera de sus contenidos, incluso en entornos tan favorables a la modelización matemática como son las escuelas de ingeniería.

Muchos enfoques en educación matemática, avalados por informes internacionales como PISA, propugnan la necesidad de enseñarlas como una herramienta de modelización, especialmente de cuestiones o situaciones que surgen fuera de su ámbito. Los responsables del estudio OCDE/PISA como en Rico, 2004 caracterizan la actividad de hacer matemáticas mediante cinco fases: a) comenzar con un problema situado en la realidad; b) organizarlo de acuerdo con conceptos matemáticos; c) despegarse progresivamente de la realidad mediante procesos tales como hacer suposiciones sobre los datos del problema, generalizar y formalizar; d) resolver el problema; e) proporcionar sentido a la solución, en términos de la situación inicial.

Este trabajo está dividido en tres partes, en la primera fijamos los objetivos, en la segunda enunciamos de una forma muy abreviada el marco teórico que tomamos como referencia, y en la tercera parte utilizaremos ese marco teórico para describir el diseño y el modelo particular de un REI con el que estamos trabajando en la Universidad de Vigo (UV).

2. Objetivos

Nuestro objetivo en este trabajo, por una lado, es ampliar y completar el diseño de un modelo particular de Recorrido de Estudio e Investigación como en Fonseca, Pereira y Casas, 2011 con el que estamos trabajando y, por otro lado, poder experimentarlo en la creación de secuencias de enseñanza y aprendizaje que se puedan llevar a cabo en las escuelas de ingeniería donde impartimos docencia. En un REI la actividad matemática es algo que no sólo se aprende y se enseña, el matemático es un profesional, como lo puede ser el arquitecto o el ingeniero, que resuelve problemas que le propone la sociedad.

3. Marco teórico

Este trabajo se sitúa en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) como en Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, cuya unidad mínima de análisis lo constituye lo que se llama una Praxeología u Organización Matemática (OM) formada por tareas, técnicas (una forma de hacer), tecnología (discurso racional de la técnica) y la teoría (justificación de la tecnología).

4. Recorrido de Estudio e Investigación

El modelo particular de REI con el que estamos trabajando se articula alrededor de 6 etapas:

a) Un *problema matemático-didáctico* al que debemos dar respuesta: introducir la diagonalización de matrices a partir de una Cuestión Problemática (CP) que surge en Secundaria.

b) Una institución concreta donde se realiza el estudio: Escuela de Ingeniería Industrial e Ingeniería Forestal de la UV.

c) Contrato didáctico (CD). En un REI aparecen nuevas responsabilidades:

- El modelo que proponemos rompe con el contrato didáctico tradicional en el que primero aparece la teoría y después problemas preparados y cerrados para resolver con la teoría dada. El aprendizaje aparece como respuesta a cuestiones problemáticas (CP) cruciales y con un enorme potencial de partida. El profesor adquiere un nuevo protagonismo en los REI, él es el responsable de proponer situaciones de aprendizaje que atrapen y comprometan a los alumnos en proyectos, que den soluciones a cuestiones iniciales ricas y potentes que no tienen respuesta en una sola sesión. Se organiza la clase en grupos pequeños de trabajo.

- La actividad matemática tiene un carácter instrumental, es un medio y no un fin. La herramienta informática tendrá un fuerte protagonismo en el estudio de la actividad matemática y en la búsqueda de un aprendizaje autónomo del alumno. La experimentación se hace en un taller de prácticas que se apoya en la combinación de dos estrategias didácticas, por un lado, proponer el estudio de una cuestión problemática definida inicialmente mediante unos datos fijos, pero cuyo estudio requiere que éstos se transformen progresivamente en parámetros y, por otro lado, utilizar una calculadora simbólica para instrumentalizar las técnicas matemáticas necesarias para abordar los tipos de problemas que surgen en esta actividad tal como se propone en Ruiz, Bosch y Gascón, 2006. En la calificación final de la asignatura el taller de prácticas se calificará con un 40%.

d) Una *"razón de ser"*: en la TAD para el estudio de una nueva OM debemos justificar:

- Legitimidad matemática: la posibilidad de conocer en qué momento histórico aparece una noción determinada, puede ser una buena fuente de motivación para los estudiantes.

- Legitimidad social: aquí debe figurar el diseño curricular propuesto por el departamento y los ***media*** que son los diferentes medios de comunicación que permiten extender el trabajo del aula.

ARBOR Vol. 187 Extra 3 diciembre [2011] 279-284 ISSN: 0210-1963 doi: 10.3989/arbor.2011.Extra-3n3158

– Legitimidad funcional: en el inicio de construcción de la nueva OM plantearemos a los alumnos el estudio de respuestas a cuestiones problemáticas (CP) potentes, ricas y fecundas, con un fuerte poder generador, que permitan hacer visible el contenido matemático vinculando la actividad matemática con verdaderos problemas de ingeniería y que den lugar a proyectos que están incompletos con la actividad desarrollada hasta ese momento.

– Legitimidad didáctica: el contexto didáctico se sitúa en el entorno de la Ingeniería Industrial y en la actividad matemática prima resolver cuestiones que no se plantean únicamente en la escuela.

e) *Cuestión Generatriz*: es la que impulsa y provoca todo el proceso de estudio y, se debe mantener viva a lo largo del mismo. La elección de la CG se hace a partir de las cuestiones propuestas en la legitimidad funcional. La elección de la CG debe ser una cuestión potente que permita articular una actividad matemática de complejidad creciente. Para su elección se valorará: a) Tener un largo recorrido que permita transitar por las distintas etapas educativas. Ser compatible con otras muchas situaciones problemáticas adicionales, lo que nos permite pasar del trabajo de un modelo particular al estudio de un modelo de modelos; b) Reunir las condiciones que se piden relativas a las competencias del programa de algebra. El proyecto generado por la CG podemos presentarlo a los alumnos como una cuestión a resolver en su futuro profesional. De todas las cuestiones problemáticas elegimos de acuerdo con los alumnos la siguiente:

   Cuestión Generatriz (CG): Trabajas como un ingeniero en una empresa de construcción que fabrica tres tipos de ventanas. La empresa quiere hacer un estudio de mercado en el que figure la producción, el precio de coste, el precio de venta y los beneficios. En este problema abierto el momento el momento exploratorio juega un papel fundamental como en Van De Walle, 2005.

f) *Proceso de estudio*: Se articula alrededor de una organización matemática local relativamente completa (OMLRC) descrita en Fonseca, 2004. Por un lado, está la construcción del producto (ingeniería didáctica) de la propia OM que vendrá descrito en términos de los *momentos didácticos* (Praxeológico Inicial, Primer encuentro, Exploratorio, Trabajo de la Técnica, Tecnológico-Teórico, Institucional, Evaluación, TIC) y, por otro lado, aparece el resultado del producto construido (ingeniería matemática) articulado alrededor de ocho indicadores (OML. 1-OML. 8) asociados a objetivos concretos que se pueden ver con más profundidad en Fonseca, 2004, que nos permiten estudiar el grado de completitud del producto final construido: *OML1*. Deben aparecer tipos de tareas asociados al "cuestionamiento tecnológico", esto es, tareas que hagan referencia a la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía y el alcance de las técnicas, así como a la comparación entre ellas; *OML2*. Existencia de diferentes técnicas para cada tipo de tareas y de criterios para elegir entre ellas; *OML3*. Existencia de diferentes representaciones de la actividad matemática; *OML4*. Existencia de tareas y de técnicas "inversas"; *OML5*. Interpretación del funcionamiento y del resultado de la aplicación de las técnicas; *OML6*. Existencia de tareas matemáticas "abiertas"; *OML7*. Necesidad de construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas; *OML8*. Debe existir la posibilidad de perturbar la situación inicial.

Hay que subrayar, que la noción de "completitud" es relativa. Existen OM más o menos "completas" que otras en función del grado en que sus componentes cumplen las condiciones descritas por los indicadores OML1-OML8.

A. Primera sesión

Momento el primer encuentro: Planteamos, de acuerdo con el contrato didáctico de Secundaria, el estudio de la CG para unos parámetros concretos dados por la empresa: Una fábrica produce 3 modelos de ventanas: grande (G), mediana (M) y pequeña (P). A su vez, cada tipo de ventana tiene 3 variantes dependiendo de si la ventana está hecha de pvc, aluminio (al) o madera (md). La producción diaria de cada tipo de ventana es: ventanas grandes: 102 de pvc, 90 de aluminio y 50 de madera; ventanas medianas: 190 de pvc, 180 de aluminio y 70 de madera; ventanas pequeñas: 30 de pvc, 50 de aluminio y 10 de madera. El coste de fabricación es: ventanas grandes: 250 euros las de pvc, 325 las de aluminio (al) y400 las de madera (md); ventanas medianas: 175 euros las de pvc, 200 las de aluminio y 300 las de madera; ventanas pequeñas: 100 euros las de pvc, 125 las de aluminio y 200 las de madera. Los precios de venta son: ventanas grandes: 450 euros las de pvc, 400 las de aluminio y 600 las de madera; ventanas medianas: 350 euros las de pvc, 300 las de aluminio y 500 las de madera; ventanas pequeñas: 250 euros las de pvc, 200 las de aluminio y 400 las de madera. Momento Praxeológico Inicial (MPI): Suponemos que forma parte del equipamiento inicial del alumno la noción y propiedades de las matrices y los sistemas de ecuaciones lineales.

Momento TIC: las primeras tareas realizadas en el taller fueron el conocimiento del programa de cálculo simbólico Máxima y como utilizaríamos los recursos que habíamos puesto en la plataforma Tema que la UV tiene a nuestra disposición. En este primer nivel, situado en Secundaria, aparece la primera organización matemática (OM1). Describimos algunas de las tareas TS_{1X} propuestas para el taller de OM1 que vamos a construir.

Tipos de tareas que tienen que ver con la nomenclatura

TS_{11}. Presentar la producción, el coste de fabricación y los precios de venta en forma de matriz. Se acuerda utilizar Pr = Producción, C = Coste y V = precio de venta. Tipo de tareas relacionadas con la interpretación de las matrices Pr, C y V:

TS_{12}. Interpreta el elemento Pr_{23}.

Tipos de Tareas relacionadas con la producción:

TS_{13}. Calcular la cantidad diaria de ventanas clasificadas según el modelo y el tipo. Se proponen tareas inversas:

TS_{14}. ¿Cuántos días trabaja la fábrica para producir 16100 ventanas de pvc, 16000 de aluminio y 6500 de madera? Tipos de Tareas relacionadas con el coste y con los ingresos:

TS_{15}. Si el precio del pvc aumenta un 10%, el aluminio baja un 12% y la madera sube un 15%,¿cuál es la nueva matriz de coste?

TS_{16}. Obtener los ingresos totales diarios de la empresa por cada modelo de ventana.

Tipos de Tareas relacionadas con los beneficios:

TS_{17}. ¿Qué beneficio se obtiene con las ventanas medianas y de madera?

TS_{18}. Con el programa de cálculo simbólico Máxima se estudian posibles perturbaciones (OML8) de las condiciones iniciales (cambiar datos en la producción, coste y precio de venta). Interpreta (OML5) resultados y compara.

Todas las tareas pueden y deben ser resueltas en el MPI del alumno.

B. Segunda sesión

La necesidad de ampliar y completar información sobre el estudio de mercado, nos traslada a un segundo nivel de complejidad situado en la Universidad. Aparecen tareas para las que los alumnos no disponen de técnicas que les permitan resolverlas, lo que provocará la aparición de una nueva OM2 que amplía y completa a la OM1 y que puede utilizarse como una posible razón de ser para introducirse en el campo de las aplicaciones lineales. Por ejemplo les proponemos tareas del tipo: TU_{11}. Construye una aplicación que nos dé la producción de cada modelo de ventana (G, M, P) en función del tiempo de producción. Comprueba que la aplicación anterior es lineal. Interpreta en este caso el significado de la linealidad. TU_{12}. ¿Cuál es la expresión algebraica de la aplicación lineal anterior? Calcula su matriz asociada.

C. Tercera sesión

La reformulación de la CG en la Universidad en el sentido siguiente, nos permite construír una nueva OM3 (diagonalización de matrices) que amplía y completa a OM2:

Con el fin de conocer la evolución del comportamiento de sus productos en el mercado con el paso del tiempo, la empresa ha realizado un estudio de fidelización a sus productos observando que el 50% de los clientes que han utilizado ventanas de pvc en un proyecto siguen utilizando el mismo tipo de material en el siguiente, pero el 40% pasa a utilizar aluminio y el resto madera. Sin embargo, el 80% de los clientes que usan aluminio lo siguen usando en el próximo proyecto, el 15% se pasan al pvc y el resto a madera. Finalmente, el 70% de los que emplean madera la

ARBOR Vol. 187 Extra 3 diciembre [2011] 279-284 ISSN: 0210-1963 doi: 10.3989/arbor.2011.Extra-3n3158

siguen utilizando en su próximo proyecto, mientras que el 5% se pasa al pvc y el resto al aluminio. La empresa desea conocer la evolución del mercado en diferentes momentos (suponemos que los porcentajes de variación permanecen constantes y que, en términos medios, el tiempo transcurrido entre un proyecto y el siguiente es de 6 meses).

Momento exploratorio: como en Polya, 1954 primeramente habla de la necesidad de enseñar a explorar y a conjeturar a los alumnos y después dejarles aprender a demostrar. Los alumnos trabajan en tipos de tareas como: TU_{13}. Calcula la matriz de transición (MT) e interpreta (OML5) filas y columnas (qué tipo de ventanas gana mercado, cuál pierde y cuál se mantiene). TU_{14}. ¿Qué probabilidad tiene un constructor que compra ventanas del tipo pvc de volver a comprar ventanas del mismo tipo después de un semestre? ¿Y de cambiar a ventanas de aluminio? ¿Y si pasan dos semestres? TU_{15}. Si al iniciar el estudio X_0 (vector inicial) sabemos que la demanda de la ventana pvc es 35%, la de aluminio es un 55% y la de madera es un 10% ¿Qué ocurre cuando pasa un semestre? ¿Y si son 2?

Todas estas tareas pueden ser resueltas con bolígrafo y papel, sin embargo, empiezan a tener un coste considerable cuando n³3 semestres. El grupo de alumnos conjetura alrededor de que valores parece estabilizarse el mercado de ventas.

Podemos hacer ahora un cuestionamiento tecnológico (OML1). ¿Qué ocurre si consideramos un vector inicial distinto, por ejemplo, X_0= (0.3, 0.6, 0.1)? ¿Qué ocurre si cambiamos la matriz de transición? El profesor participa en la discusión del grupo tratando de enriquecerla. Todo este trabajo que se realiza en Máxima permite a los alumnos afirmar que la elección en el tipo de ventana después de pasar muchos semestres sufre variaciones si cambiamos la matriz de transición, pero no existen variaciones si cambiamos el vector inicial. La obtención de respuestas, aunque sean provisionales, es el interés principal de este momento. El paso siguiente es pasar de conjeturar a validar y esto nos introduce en él:

Momento del Trabajo de la técnica: La necesidad de ser rigurosos en las respuestas obtenidas en el momento exploratorio nos introduce en la búsqueda de un modelo matemático: $X_1=MT\times X_0$; $X_2=MT\times X_1=MT^2\times X_0,\ldots, X_n=MT\times X_{n-1}=MT^n\times X_0$. El modelo algebraico pone de manifiesto que el comportamiento en el cambio de tipo de ventana, que se elige después de pasar n semestres, depende de las potencias MT^n y que el coste manual es enorme cuando n es muy grande. La necesidad de dar una respuesta a esta cuestión simplificando el proceso, es decir, disminuyendo el coste y aumentando el rigor OML1, provoca la aparición de nueva actividad matemática y se convierte en la "razón de ser" de una nueva técnica matemática denominada *diagonalización de matrices.* El trabajo de la técnica provoca una ampliación de la organización matemática anterior OM2. La justificación del desarrollo teórico lo haremos en el Momento Tecnológico-Teórico.

Momento Institucional: el REI propuesto moviliza e integra una gran variedad de cuestiones muy ricas (relacionadas con la producción, coste, ventas, ingresos,...) que aparecen como un medio muy importante para el estudio de la actividad funcional de las matemáticas. Utilizando este modelo, los alumnos (en grupos) desarrollan en el taller de prácticas proyectos relacionados con trabajadores que se mueven en tres sucursales, distintos estados atmosféricos en una ciudad, dinámica de poblaciones, herencia genética, estudios de mercado, etc.

Momento de la evaluación: El proceso de evaluación del REI pone de manifiesto que, los alumnos no están acostumbrados a trabajar en equipo, desajustes entre el diseño matemático y didáctico, problemas con el tiempo institucional y didáctico, fuerte dependencia del profesor, no cuestionan los resultados informáticos y están poco acostumbrados al estudio profundizado de una cuestión inicial con un enorme potencial de partida.

5. Conclusiones

Las instituciones docentes deben construir discursos que permitan transitar e integrar la actividad matemática entre Secundaria y Universidad. Los REI quieren situar en el corazón de la actividad matemática el estudio de cuestiones "ricas", "vivas" y "fecundas". El REI es un dispositivo didáctico que pone en manos del profesor y del alumno nuevos recursos didácticos que están ausentes del marco institucional actual para el estudio de la actividad matemática. En los REI podemos hablar de cierta convergencia entre la escuela y la sociedad.

BIBLIOGRAFÍA

Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascón, J. (1997): *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, Barcelona: Horsori Editorial.

Fonseca, C. (2004): *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Enseñanza Secundaria y la Enseñanza Universitaria*, Tesis doctoral. Universidad de Vigo.

Fonseca, C.; Pereira, A. y Casas, J. M. (2011): *Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI),* Revista Educación Matemática, Vol. 23 (1), pp. 1-16.

Polya, G. (1954): *Mathematics and Plausible Reasoning,* Princeton University Press.

Rico, L. (2004): *Evaluación de competencias matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003,* Actas VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Universidad de La Coruña. En E. Castro, E. de la Torre Ed.

Rocard, M.; Csermely, P.; Jorde, D.; Walwerg-Henriksson, H. y Hemmo, V. (2007): *Enseñanza de las ciencias ahora: Una nueva pedagogía para el futuro de Europa,* Informe Rocard. Comisión europea, ISBN: 978-92-79-05659-8.

Ruiz, N.; Bosch, M. y Gascón, J. (2006): *Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con Wiris,* en Ruiz Higueras, L.; Estepa, A.; García, F. J. (eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico,* Publicaciones de la Diputación de Jaén, pp. 635-660.

Van De Walle, J. A. (2001): *Teaching Through Problem Solving,* Van De Walle, J. A. (Ed.). Elementary and Middle School Mathematics. New York: Longman, pp. 40-61.

ARBOR Vol. 187 Extra 3 diciembre [2011] 279-284 ISSN: 0210-1963

doi: 10.3989/arbor.2011.Extra-3n3158