Una nueva relación entre la Física y las Matemáticas en el ocaso del siglo XX

José M. Fdez. de Labastida

Arbor CLIX, 626 (Febrero 1998), 215-230 pp.

La relación entre matemáticas y física es una de las más estudiadas entre las existentes entre las ciencias positivas. Lo que parece incuestionable es la efectividad, más allá de lo razonable, parafraseando a Wigner, de la descripción matemática de la Naturaleza. La historia de las relaciones entre estas dos disciplinas, antaño casi indistinguibles, está llena de encuentros y desencuentros. En la presente contribución se pone el acento sobre avances comunes, relacionados con ciertas teorías cuánticas de campos supersimétricas en bajas dimensiones desde el punto de vista físico.

En la década de los ochenta se ha presenciado el nacimiento de una nueva relación entre la física y las matemáticas. Se ha descubierto cómo los elementos más avanzados de la física teórica pueden utilizarse para generar nuevos resultados para las matemáticas. Este tipo de relación no tiene precedentes en la historia. Aunque la física y las matemáticas se desarrollaron de manera conjunta hasta finales del siglo pasado, con el comienzo del siglo XX la abstracción comienza a jugar un papel fundamental en las matemáticas y, desde entonces, cada una de estas disciplinas evoluciona separadamente. En siglos anteriores era habitual que se crearan nuevas matemáticas para atender las exigencias que demandaba la física. En este siglo la dinámica está resultando muy diferente. Ambas disciplinas evolucionan por sí solas y la física se encuentra con las matemáticas ya construidas cuando tiene necesidad de ellas. Éste es el caso, por ejemplo, de la teoría general de la relatividad y de la física cuántica. Tanto la geometría Riemanniana, que juega un papel crucial en la primera de estas teorías, como la teoría de los espacios de Hilbert, elemento central de la segunda, se habían construido desde un punto de vista enteramente matemático con anterioridad a la formulación de las teorías físicas. La característica de este siglo hasta los años ochenta ha sido que las matemáticas estaban siempre disponibles cuando la física las necesitaba. En los años ochenta se produce un fenómeno de naturaleza completamente distinta. La física teórica, en el contexto de la teoría cuántica de campos y de la teoría de cuerdas, comienza a proporcionar nuevas matemáticas. Además, estas nuevas matemáticas no son necesariamente producidas por el interés que la física teórica tiene en ellas, sino que la motivación, en muchos casos, proviene exclusivamente de una perspectiva matemática. La rama de las matemáticas que está particularmente involucrada en estos desarrollos es la topología. El aspecto de la física que juega un papel crucial en ellos es su naturaleza cuántica. Resulta que las teorías que son utilizadas para explicar los procesos cuánticos de la naturaleza son las mismas que, apropiadamente escogidas, son capaces de generar importantes resultados para la topología.

Las teorías cuánticas de campos y las teorías de cuerdas son teorías físicas que poseen la propiedad de ser relativistas y cuánticas. Estas teorías implementan por tanto los principios fundamentales de la física, englobados en los fundamentos de la física cuántica y de la relatividad especial. Las teorías cuánticas de campos se utilizan para explicar fenómenos de la naturaleza donde los efectos relativistas y los cuánticos son importantes. Estos fenómenos son, fundamentalmente, los correspondientes a la física de partículas de altas energías. Estas teorías han cosechado un gran éxito en el rango de energías y niveles de precisión en las que se han verificado. Actualmente se dispone del denominado *modelo estandar*. Se trata de una teoría cuántica de campos capaz de predecir los fenómenos que tienen lugar en los aceleradores de partículas (instrumentos experimentales capaces de producir colisiones de partículas elementales a altas energías). En ella se tienen en cuenta tres de las interacciones fundamentales, la fuerte, la débil y la electromagnética, tratando de forma unificada estas dos últimas. En los últimos años este modelo se ha verificado experimentalmente con una alto grado de precisión. Sin embargo, el modelo deja muchas preguntas sin respuesta. Por ejemplo, como prácticamente todas la teorías cuánticas de campos, el modelo hace uso de un elemento de las matemáticas, la integración funcional, que no goza de un formalismo asentado. Además, el modelo no incluye la gravedad. Precisamente uno de los objetivos que se persiguen en la teoría de cuerdas es formular una teoría cuántica y relativista que incluya la gravedad de manera consistente y unificada con las otras tres interacciones fundamentales.

Volviendo al análisis de la nueva relación entre la física y las matemáticas, es importante resaltar que, por el momento, en el contexto donde ha florecido con rotundidad ha sido en el de la teoría cuántica de campos. Es en este marco en el que realmente se han producido desarrollos que interesan únicamente a las matemáticas. Aunque en la teoría de cuerdas también se han generado importantes resultados para la topología, como es el caso del descubrimiento de la *simetria espejo* de la que se hablará más adelante, la motivación proviene de la teoría de cuerdas misma, no de una perspectiva únicamente matemática. En el contexto de las teorías cuánticas de campos las teorías involucradas en estos desarrollos, por ser fundamentalmente relevantes para la topología, se denominan *teorias cuánticas de campos topológicas*. Se puede afirmar que estas teorías trazan un puente entre la física y las matemáticas sin precedentes en la historia que, como se argumentará más adelante, posee un prometedor futuro.

El hecho de que la motivación para analizar este tipo de teorías parta de una perspectiva matemática no quiere decir que carezcan de utilidad para la física. Hay muchas razones basadas en la física para estudiar este tipo de teorías. En primer lugar, se trata de unas de las teorías cuánticas de campos más sencillas. Prácticamente éstas son las únicas que se han logrado resolver exactamente. Ello permite profundizar en el conocimiento sobre las teorías cuánticas de campos y crear instrumentos de trabajo que, quizá, puedan ser utilizados en otras teorías. En segundo lugar, es muy posible que algunas de estas teorías puedan servir de punto de partida para el estudio de otras de mayor interés desde el punto de vista físico. Algunos avances en este sentido se han producido recientemente. En tercer lugar, ha quedado demostrado que las teorías cuánticas de campos topológicas constituyen un excelente banco de pruebas para efectuar verificaciones de algunos argumentos basados en la física que no poseen, por el momento, un respaldo matemático suficiente. Es aconsejable desarrollar en cierto detalle lo que quiere decir esto. Como ya se indicó anteriormente, el contexto matemático en el que se formulan las teorías cuánticas de campos, es decir, la integración funcional, no goza de gran solidez desde un punto de vista matemático. Esto ha originado que en el marco de la física teórica se desarrollen una serie de métodos para obtener información sobre la estructura de las teorías cuánticas de campos. Estos métodos, que a grandes rasgos se clasifican en perturbativos y no perturbativos, en muchos casos se han desarrollado a partir de las características de los fenómenos que las teorías correspondientes supuestamente deberían explicar. Ciertamente no se dispone de una demostración de su validez desde un punto de vista riguroso. Cuando estos métodos se aplican a las teorías cuánticas de campos topológicas dan lugar a resultados que, a menudo, pueden ser verificados desde otros puntos de vista. El hecho de que estos resultados se confirmen supone una verificación muy importante de los argumentos físicos comúnmente utilizados en las teorías cuánticas de campos.

Las teorías cuánticas de campos topológicas han originado la dinámica entre la física y las matemáticas que a continuación se describe. Haciendo uso de los métodos de las teorías cuánticas de campos se predice un resultado matemático. Este resultado se analiza desde un punto de vista matemático y entonces se trata de establecerlo con rigor, utilizando los métodos propios de las matemáticas. En el proceso se generan nuevas formas de entender los resultados e, incluso, formalismos enteramente nuevos. El primer caso en el que tuvo lugar este tipo de interrelación fue el correspondiente a la teoría de Morse en el contexto de la *mecánica cuántica supersimétrica y* de los *modelos sigma bidimensionales supersimétricos.* En 1982 E. Witten estudió estos modelos y a partir de ellos construyó una generalización de la teoría de Morse utilizando los métodos propios de las teorías cuánticas de campos. La teoría resultante, conocida hoy en día como la *teoría de Morse-Witten,* se estableció rigurosamente desde una perspectiva matemática algún tiempo después por A. Floer. La teoría no sólo goza ahora de la solidez propia de una teoría matemática, sino que fue aplicada por el propio A. Floer a otras situaciones con el fin de obtener información sobre la topología de las variedades tridimensionales. De hecho, como se describirá más adelante, estos trabajos de A. Floer fueron, en cierta medida, el detonador de las teorías cuánticas de campos topológicas.

La dinámica descrita se ha reproducido en diversas ocasiones a lo largo de los últimos quince años, especialmente después de la formulación de las teorías cuánticas de campos propiamente topológicas. La generalización de la teoría de Morse de 1982 en el contexto de los modelos sigma supersimétricos puede considerarse como el germen que originó unos años más tarde, en 1988, la formulación de las teorías cuánticas de campos topológicas por E. Witten. Además del propio E. Witten, creador indiscutible de estas teorías, el coprotagonista de esta formulación fue M. Atiyah. A lo largo de la década de los ochenta M. Atiyah había venido manifestando su convencimiento de que algunos de los invariantes topológicos que se estaban estudiando por los topólogos y los geómetras podrían ser formulados en el contexto de la teoría cuántica de campos. En concreto, M. Atiyah predijo que la teoría de los *invariantes de Donaldson* y la de los *invariantes de Jones* para nudos y enlaces, ambas surgidas en la primera mitad de los ochenta, admitían una formulación en términos de la teoría cuántica de campos. Las siguientes palabras de E. Witten, recogidas en las actas correspondientes al I. A. M. P. Congress de Swansea en el verano de 1988 [1], donde presentó algunas de las teorías cuánticas de campos topológicas que construyó ese año, muestran claramente el importante papel jugado por M. Atiyah:

> *In a lecture at the Hermann Weyl Symposium last year, Michael Atiyah proposed two problems for quantum field theorists. The first problem was to give a physical interpretation for Donaldson theory. The second problem was to find an intrinsically three dimensional definition of the Jones polynomial of knot theory. I would like to give a flavour of these two problems.*

es decir,

> *El pasado año, en su conferencia en el Simposio Hermann Weyl, Michael Atiyah propuso dos problemas a los físicos teóricos que trabajaban con la teoría cuántica de campos. El primer problema era dar una interpretación física a la teoría de Donaldson. El segundo problema era encontrar una definición intrínsicamente tridimensional de la teoría del polinomio de Jones. Me gustaría presentar una posible solución a estos dos problemas.*

Es indiscutible que E. Witten resolvió en 1988 los dos problemas propuestos por M. Atiyah. De hecho, E. Witten fue premiado por estos trabajos en 1990 con la Medalla Fields, el galardón más prestigioso de las matemáticas.

Los invariantes de Donaldson, introducidos por S. Donaldson en 1983, son invariantes topológicos de variedades cuadridimensionales que dependen de la estructura diferenciable de la variedad. Son muy importantes en la topología porque permiten avanzar en la clasificación de las variedades cuadridimensionales diferenciables. Contrariamente a lo que ocurre en dos y tres dimensiones, las clases de variedades diferenciables y las de variedades continuas no son las mismas para dimensiones superiores. En el caso de dimensiones superiores a cuatro se dispone de los instrumentos matemáticos necesarios para controlar las clases de variedades diferenciables dentro de cada clase topológica. En cambio, en dimensión cuatro, se está bastante lejos de disponer de un control similar. Los invariantes diferenciales, como los de Donaldson, permiten avanzar en la clasificación de las clases de estructuras diferenciables que admite una determinada clase topológica. Aunque se conoce que las variedades compactas cuadridimensionales no son topológicamente clasificables, sí se espera que las pertenecientes a subconjuntos de éstas como, por ejemplo, el formado por aquellas con grupo fundamental trivial, puedan clasificarse topológicamente. De hecho, esta clasificación se ha conseguido para este ejemplo y, además, se espera disponer en breve plazo de una clasificación de las clases de variedades diferenciables en las que se divide cada una de las clases de variedades continuas. Los invariantes de Donaldson han producido importantes avances en la resolución de este problema aunque aún no se conoce si proporcionan una solución completa. El problema sigue abierto, incluso teniendo en cuenta los nuevos invariantes surgidos en el contexto de las teorías cuánticas de campos topológicas que se describirán más adelante.

Los invariantes de Jones para nudos y enlaces fueron introducidos por V. F. R. Jones en 1984. Su hallazgo tiene cierta relación con la física, ya que se descubrieron en el estudio de ciertas álgebras que juegan un importante papel en algunos modelos mecánico-estadísticos. Pero éste no es en absoluto el primer contacto entre la física y la teoría de nudos. El propio origen de esta teoría está ligado a la física. La teoría de nudos se comenzó a estudiar a finales del siglo pasado cuando Lord Kelvin (W. Thompson) propuso un modelo atómico basado en los nudos. El modelo asignaba un nudo a cada átomo, explicando así la gran variedad de éstos. Asimismo, el modelo explicaba la estabilidad de los átomos asociándola al tipo topológico del nudo. Finalmente, las vibraciones del nudo proporcionaban un mecanismo para explicar los espectros atómicos. Aunque la propuesta de Lord Kelvin se desechó rápidamente, constituyó un estímulo para que P. G. Tait comenzara a estudiar la clasificación de los nudos. En 1990 publicó la primera tabla de nudos y enlaces, y formuló una serie de conjeturas, algunas de las cuales tuvieron que esperar hasta la formulación de los invariantes de Jones para ser resueltas. Desde entonces la teoría de nudos ha constituído un campo importante en las matemáticas.

Sus aplicaciones más sobresalientes en esta disciplina son las realizadas en el contexto de la topología de las variedades tridimensionales. En otros contextos, la teoría de nudos se ha aplicado a diversos aspectos de la física, de la química y de la biología. Una de las metas de la teoría de nudos es clasificar los nudos y los enlaces. A lo largo de este siglo se han desarrollado diversas técnicas para avanzar en este problema. Una de ellas se basa en la construcción de invariantes (cantidades que sólo dependen del tipo de nudo). Un invariante es tanto más fino cuanto mayor es su poder discriminador entre tipos de nudos. La búsqueda de invariantes cada vez más finos ha sido una constante en la evolución de esta teoría. El descubrimiento del invariante de Jones supuso un enorme avance en este sentido. Permitió resolver algunas de las conjeturas realizadas por P. G. Tait en los comienzos del siglo XX. Sin embargo, poco después de su descubrimiento se demostró que el invariante de Jones no clasificaba los nudos. No obstante, debido en parte a la influencia de su representación en términos de una teoría cuántica de campos topológica, el invariante se ha generalizado en los últimos años, produciéndose importantes avances en el problema de la clasificación.

Como ya se ha indicado, M. Atiyah fue el impulsor de la búsqueda de una representación de los invariantes de Donaldson en el formalismo de la teoría cuántica de campos. Sus observaciones se vieron reforzadas por el hecho de que los trabajos de A. Floer sobre variedades compactas tridimensionales podían reformularse utilizando el lenguaje propio de la teoría cuántica de campos. Esto le hizo intuir, dada la relación que existía entre los invariantes de Donaldson y los *grupos de homología de Floer* —objetos fundamentales en el trabajo de A. Floer— que debería existir la mencionada representación. La influencia que ejerció en E. Witten en el otoño de 1987 fue crucial para que éste, al principio de 1988, presentara su artículo sobre la representación de los invariantes de Donaldson en el formalismo de la teoría cuántica de campos, y acuñara el término de teoría cuántica de campos topológica. Desde entonces, se han formulado muchas otras teorías cuánticas de campos topológicas, constituyendo hoy en día un área importante de la física matemática y jugando un papel central en la recientemente bautizada «matemática física». El impacto de estas teorías en la comunidad de físicos teóricos, y de geómetras y topólogos, ha sido tan importante que ha surgido esta nueva área, que goza ya del estatus de sección en una de las revistas científicas más influyentes de la física teórica. En la física matemática se estudian métodos matemáticos con el fin de aplicarlos a la física. En cambio, en la matemática física, se estudian métodos propios de la física para aplicarlos con el fin de obtener resultados para las matemáticas.

Antes de adentrarse con más profundidad en los detalles de las teorías cuánticas de campos topológicas es preciso resaltar que, aparte de la influencia M. Atiyah, hubo otro hecho en los años ochenta que jugó un importante papel en el nacimiento de estas teorías. En la década de los ochenta la física teórica estaba claramente marcada por el desarrollo de los aspectos geométricos y topológicos de las teorías con las que se trabajaba. Se disponía de un escenario adecuado para que surgieran nuevas teorías cuya componente matemática gozara de particular importancia. Esta tónica se acentuó a partir de 1984, cuando un sector de la comunidad de físicos teóricos se volcó en el estudio de la teoría de cuerdas. Fue entonces cuando áreas de las matemáticas que hasta entonces habían jugado un tímido papel en la física teórica comenzaron a adquirir un importante protagonismo. La componente topológica y geométrica de los desarrollos de esos años fue notablemente superior a la de épocas anteriores. Además, es importante recordar otro hecho que, aunque circunstancial, contribuyó a motivar la formulación de las teorías cuánticas de campos topológicas. En esos años se descubrió que a altas temperaturas las teorías de cuerdas podían ser descritas en términos de teorías carentes de grados de libertad. Las teorías cuánticas de campos topológicas presentan esta característica y, de hecho, una de las razones que motivaron a E. Witten para construir la primera teoría de este tipo en 1988 fue la de disponer de una teoría que tuviera la propiedad mencionada. Esta propiedad de las teorías cuánticas de campos topológicas, que las relaciona con las teorías de cuerdas, no ha producido ningún desarrollo adicional. Esto no quiere decir que no haya relación entre ambas teorías. Como argumentaremos más adelante, la teoría de cuerdas puede proporcionar mecanismos para explicar desde una perspectiva diferente y, asimismo, generalizar los resultados más recientes en el contexto de las teorías cuánticas de campos topológicas.

En 1988, E. Witten presentó las otras dos teorías cuánticas de campos topológicas que han tenido más impacto en los últimos años. Formuló los *modelos sigma topológicos,* que constituyen una representación en términos de la teoría cuántica de campos topológica de los *invariantes de Gromov, y* la *teoría gauge de Chern-Simons* para variedades tridimensionales, que contienen invariantes topológicos asociados a nudos y enlaces. La primera de estas teorías guarda relación con la teoría de cuerdas y encierra ciertas claves para entender el origen de la simetría espejo. Las teorías gauge de Chern-Simons constituyen un instrumento muy útil para el estudio de los invariantes de nudos y enlaces como el invariante de Jones. Al igual que en el caso de los invariantes de Donaldson, M. Atiyah fue también el impulsor de una teoría que constituyera una representación de invariantes de nudos y enlaces. Ahora también, los argumentos de M. Atiyah para creer en la existencia de tal formulación estaban basados en los trabajos de A. Floer dedicados al estudio de la topología de las variedades tridimensionales. La teoría gauge de Chern-Simons es la primera formulación de los invariantes de Jones en un marco enteramente tridimensional. Además, ofrece un nuevo formalismo para estudiar invariantes topológicos asociados a variedades tridimensionales diferenciables arbitrarias. La teoría ha dado importantes resultados tanto de cara a la clasificación de nudos y enlaces, como a la clasificación de variedades tridimensionales. La dinámica de la relación entre la física y las matemáticas protagonizada por la teorías cuánticas de campos topológicas también se ha manifestado en este caso. Los resultados obtenidos, haciendo uso de métodos propios de la teoría cuántica de campos en las teorías gauge de Chern-Simons, se han conseguido desde otros puntos de vista, con raíces matemáticas más firmes. Así, parte de los invariantes pueden obtenerse en el contexto de los grupos cuánticos, y la estructura de los mismos puede formularse en el marco de la teoría de las categorías.

Todas estas formulaciones de los invariantes topológicos de variedades tridimensionales y de los invariantes de nudos y enlaces han dado importantes resultados, además de impulsar el estudio de otros objetos de interés. Es posible, sin embargo, que la formulación basada en las teorías cuánticas de campos topológicas sea más rica que las demás ya que, en este caso, se pueden aplicar una gran variedad de métodos. Precisamente, el hecho de que las teorías cuánticas de campos no estén bien definidas ha provocado, en gran medida, la proliferación de una amplia variedad de métodos de estudio. La explotación de este aspecto de las teorías cuánticas de campos ha producido y producirá importantes resultados en el contexto de la teoría gauge de Chern-Simons, que difícilmente se vislumbrarían en otros formalismos.

Si la década de los ochenta se caracterizó por la gestación de las teorías cuánticas de campos topológicas, la de los noventa se caracteriza por su desarrollo. Esta década comenzó con la formulación de un determinado tipo de teorías cuánticas de campos topológicas desde una perspectiva matemática. Esta formulación se basa en una generalización para el caso infinito-dimensional del *formalismo de Mathai-Quillen*. Este formalismo, bien asentado para el caso finito-dimensional, se generaliza para el caso infinito-dimensional introduciendo una serie de ecuaciones diferenciales que proporcionan cierta regularización, al pasar de un espacio infinito-dimensional a otro finito-dimensional que está formado por el conjunto de soluciones de este sistema de ecuaciones diferenciales. En general, a estos conjuntos de soluciones se les denomina espacios modulares. Tanto la teoría cuántica de campos topológica resultante como los correspondientes invariantes topológicos dependen del sistema de ecuaciones escogido y de su correspondiente espacio modular. Una buena selección de dichos sistemas de ecuaciones proporciona información importante sobre la topología de las variedades en las que están formulados. La interpretación de un determinado tipo de teorías cuánticas de campos topológicas en el formalismo de Mathai-Quillen es muy satisfactoria desde un punto de vista matemático, pero no ha proporcionado, hasta el momento, métodos de cálculo de los invariantes topológicos asociados que sean eficientes. Los resultados importantes se han obtenido al aplicar a las teorías cuánticas de campos topológicas los métodos propios de las teorías cuánticas de campos.

El formalismo de Mathai-Quillen engloba una serie de teorías cuánticas de campos topológicas como la relacionada con los invariantes de Donaldson; pero no contiene otras como, por ejemplo, las teorías gauge de Chern-Simons. Para este segundo tipo de teorías se ha optado, desde el punto de vista matemático, por una formulación axiomática. M. Atiyah es el responsable de esta formulación, que, si bien elimina la inquietuz que produce no disponer del formalismo de la integración funcional, no proporciona, sin embargo, buenos métodos de cálculo de invariantes topológicos.

En el contexto de la teoría cuántica de campos topológica cuadridimensional correspondiente a los invariantes de Donaldson —denominada en la actualidad *teoría de Donaldson-Witten*— los importantes resultados que se han obtenido en los últimos años provienen de que se le han aplicado los métodos no perturbativos que han desarrollado N. Seiberg y E. Witten para las *teorías cuánticas de campos gauge con dos supersimetrías*. Como ya se ha indicado, los métodos de estudio en las teorías cuánticas de campos se clasifican, a grandes rasgos, en perturbativos y no perturbativos. Los métodos perturbativos fueron utilizados por el propio E. Witten en su primer trabajo sobre teorías cuánticas de campos topológicas para demostrar que la teoría cuántica de campos que formuló correspondía, de hecho, a una representación de los invariantes de Donaldson. Los métodos no perturbativos de las teorías cuánticas de campos gauge, como es el caso de la teoría de

Donaldson-Witten, no parecían poderse aplicar a esta teoría en el estado en que se encontraban antes de 1994. Sin embargo, en ese año, utilizando ideas basadas en la dualidad, N. Seiberg y E. Witten descubrieron la estructura de las teorías cuánticas de campos gauge con dos supersimetrías cuando éstas se consideran a bajas energías. Este resultado se clasifica como no perturbativo y se puede considerar como el mayor avance en la teoría cuántica de campos acontecido en esta década. El conocimiento de la estructura mecionada supone dar un paso crucial para desentrañar el contenido de las teorías cuánticas de campos en cuestión.

Los resultados de N. Seiberg y E. Witten sobre las teorías cuánticas de campos gauge con dos supersimetrías tienen una aplicación inmediata en la teoría de Donaldson-Witten, ya que esta teoría puede interpretarse como una forma especial de teoría gauge con dos supersimetrías. La característica que la hace especial es controlable cuando se analizan las teorías a bajas energías y la consecuencia inmediata es que se crea una nueva representación de los invariantes topológicos. En esta nueva representación intervienen otras teorías cuánticas de campos topológicas, diferentes de la de Donaldson-Witten. Sus correspondientes invariantes topológicos han de estar necesariamente relacionados con los de Donaldson. Y de hecho es así. La predicción del análisis físico es que los invariantes de Donaldson pueden escribirse en términos de estos nuevos invariantes, asociados a otra teoría cuántica de campos topológica y, por tanto, a otro sistema de ecuaciones al que corresponde un espacio modular distinto. Esta relación, totalmente inesperada en el marco de la topología, proporciona un punto de vista nuevo para estudiar los invariantes diferenciales de las variedades cuadridimensionales. Los nuevos invariantes reciben el nombre de *invariantes de Seiberg-Witten y* están asociados a un sistema de ecuaciones diferenciales más sencillo que el correspondiente a la teoría de Donaldson-Witten. Paralelamente, el nuevo espacio modular tiene una estructura más simple que el antiguo. Toda la información que encierran los invariantes de Donaldson está contenida en los invariantes de Seiberg-Witten. Una vez hecha la predicción, se verificó en todas las situaciones en que se disponía de información suficiente. El estudio de los invariantes de Seiberg-Witten ha sido intenso desde su aparición en el otoño de 1994. Los resultados sobre variedades cuadridimensionales que se habían obtenido a partir de los invariantes de Donaldson se volvieron a obtener de forma más sencilla utilizando estos invariantes, así como aparecieron nuevos resultados. Cabe preguntarse qué tiene de especial este nuevo sistema de ecuaciones para que no haya sido estudiado con anterioridad. La respuesta a esta pregunta radica, quizá, en el hecho de que este sistema de ecuaciones diferenciales contiene espinores, algo totalmente novedoso en el marco de la topología, aunque corriente en la física.

Desde la formulación de los invariantes de Seiberg-Witten, siguiendo con la habitual dinámica de esta nueva relación entre la física y las matemáticas, se está buscando una demostración rigurosa, desde una perspectiva matemática, de la predicción realizada por la teorías cuánticas de campos topológicas. La comunidad matemática muestra un gran interés en dicha demostración. De llevarse a cabo, es muy posible que esté guiada por la teoría de cuerdas. Existe una creencia compartida de que la dualidad en las teorías cuánticas de campos se entenderá a partir de un conocimiento más profundo de la teoría de cuerdas. El avance en este entendimiento constituirá un ingrediente clave del nuevo punto de vista preciso para comprender la relación entre los invariantes de Donaldson y los invariantes de Seiberg-Witten. Quizá así se encuentre una nueva vía de ataque para su demostración rigurosa.

En la teoría gauge de Chern-Simons los métodos no perturbativos se han aplicado desde distintos puntos de vista, comenzando por la propia formulación de la teoría en 1988. Estos métodos demostraron que los invariantes topológicos que contiene la teoría están asociados a nudos y enlaces. Más tarde fueron extendidos a objetos más generales demostrando que también se dispone de invariantes de grafos. Asimismo, estos métodos produjeron procedimientos de cálculo aplicables a una gran variedad de situaciones. Los invariantes de nudos y enlaces resultantes son los invariantes de Jones y sus generalizaciones. Los métodos perturbativos se aplicaron poco después dando lugar a la formulación de representaciones integrales de nuevos invariantes de nudos y enlaces, posteriormente identificados como *invariantes de Vassiliev*. Los invariantes de Vassiliev fueron introducidos por V. A. Vassiliev en 1990 de manera simultánea —pero totalmente independiente— al estudio perturbativo de la teoría gauge de Chern-Simons. Su identificación en el contexto de la teoría gauge de Chern-Simons permite obtener representaciones de los mismos difíciles de imaginar desde otros puntos de vista. Tanto los resultados no perturbativos como los perturbativos se han obtenido también de manera rigurosa desde una perspectiva matemática, en consonancia con la dinámica general de la relación entre la física y las matemáticas que se viene describiendo.

Los modelos sigma topológicos bidimensionales han proporcionado menos puntos de vista sobre los invariantes topológicos que contienen, los invariantes de Gromov. Quizá estos modelos no hayan recibido la atención necesaria, ya que ésta se ha concentrado principalmente en el análisis de la simetría espejo, una simetría inherente a la teoría de cuerdas, que se manifiesta en los modelos sigma topológicos con la existencia, en realidad, de dos tipos de modelos. La simetría espejo proporciona un apareamiento de variedades de tal manera que los invariantes cuánticos asociados a una de ellas pueden expresarse en términos de los invariantes clásicos de la otra y viceversa. Esto constituye un resultado totalmente inesperado en el marco matemático, cuyo origen proviene de la teoría de cuerdas. Es en el contexto de las teorías de cuerdas donde se han obtenido las relaciones resultantes de la existencia de la simetría espejo. Como en casos anteriores, hay un gran interés en demostrar la existencia de este tipo de simetría desde un punto de vista riguroso. Esta simetría tiene una gran importancia en la misma teoría de cuerdas y sus propiedades se han estudiado intensamente durante los últimos años en el propio contexto de la teoría.

La aplicación de los resultados perturbativos y no perturbativos a las teorías cuánticas de campos topológicas en tres y cuatro dimensiones ha revelado que poseen cierto paralelismo en sus estructuras. En las teorías gauge de Chern-Simons los invariantes de nudos y enlaces están etiquetados por el grupo gauge y por las representaciones de este grupo que tienen asignadas cada una de las componentes del enlace (un nudo se considera como un enlace de una sola componente). En el análisis no perturbativo el invariante tiene la forma de un polinomio en cierta variable. El análisis perturbativo, sin embargo, conduce a una serie infinita que corresponde a la expansión del polinomio después de hacer una sustitición de su variable por una función exponencial. En la serie perturbativa, cada término se asocia a un invariante de Vassiliev multiplicado por cierto factor que depende de la etiqueta del invariante en términos de la información proveniente del grupo y de las representaciones de las componentes. En este resultado hay que resaltar que el invariante de Vassiliev no depende ni del grupo, ni de las representaciones, sino del tipo de nudo o enlace y de la topología de la variedad tridimensional en la que está inmerso. Son, por tanto, universales ya que no dependen de la información relativa al grupo. La teoría gauge de Chern-Simons predice que todos sus invariantes de nudos y enlaces —cualquiera que sea el grupo y las representaciones escogidas— pueden expresarse en términos de unos invariantes universales que se identifican con los invariantes de Vassiliev. De ahí que toda la información topológica que encierran los invariantes de Chern-Simons está contenida en el conjunto de los invariantes de Vassiliev. No se ha logrado demostrar o refutar por el momento la afirmación recíproca. En la teoría de Donaldson-Witten aparece una estructura similar. Los invariantes de Donaldson, que además de estar etiquetados por elementos de la homología de la variedad cuadridimensional, lo están también por el grupo gauge que se considera, pueden expresarse en términos de otros invariantes, los invariantes de Seiberg-Witten, que tan sólo dependen de la topología y de la estructura diferenciable de la variedad. Los factores que aparecen en la correspondiente expresión multiplicando los invariantes de Seiberg-Witten contienen toda la información referente a la homología y al grupo. Por tanto, los invariantes de Seiberg-Witten poseen también la propiedad de universalidad, jugando el mismo papel que los invariantes de Vassiliev en el caso tridimensional. La estructura descrita se ha visto reforzada a raíz de los resultados recientes sobre la generalización de la teoría de Donaldson-Witten que a continuación se describen.

La década de los noventa, además de caracterizarse por la construcción de las soluciones explícitas de algunas teorías cuánticas de campos topológicas, que indiscutiblemente han abierto nuevos e inesperados caminos, está resultando ser muy provechosa en lo que respecta a la generalización de estas teorías. La teoría de Donaldson-Witten es tan sólo un ejemplo del enorme espectro de teorías cuánticas de campos topológicas. El estudio de la información topológica que encierra este conjunto de teorías se encuentra en sus comienzos. Por el momento se ha descubierto que los invariantes asociados a la situación más sencilla posible, diferente de la teoría de Donaldson-Witten, pueden expresarse en términos de los invariantes de Seiberg-Witten. Este hecho, unido a la existencia de una estructura similar en la teoría gauge de Chern-Simons, ha conducido a la introducción de la noción de *clase de universalidad de invariantes topológicos.* En este contexto, los invariantes de Seiberg-Witten formarían una clase de universalidad. Invariantes como los de la teoría de Donaldson-Witten, así como los de la única generalización que se ha estudiado en detalle, pertenecerían a esta clase. Cuántas teorías cuánticas de campos topológicas forman parte de esta clase y si existen otras clases además de la formada por los invariantes de Seiberg-Witten son problemas abiertos. De forma análoga, los invariantes de Vassiliev constituyen una clase de universalidad. Todos los invariantes de nudos y enlaces correspondientes a la teoría gauge de Chern-Simons pertenecen a esta clase. Tanto en tres como en cuatro dimensiones, la pregunta fundamental es cuántas clases de universalidad son necesarias para obtener la clasificación de los nudos y enlaces en un caso, y de las variedades diferenciables (para grupo fundamental fijo) en el otro. Estas preguntas suponen un gran reto para los físicos y los matemáticos del próximo siglo. En la siguiente tabla se han representado las estructuras descritas, indicando el método de análisis que está detrás de cada uno de los tipos de invariantes en el contexto de las teorías cuánticas de campos topológicas:

	dimensión 3	dimensión 4
perturbativo	Vassiliev	Donaldson
no perturbativo	Jones	Seiberg-Witten

En este artículo se ha analizado una nueva relación entre la física y las matemáticas que ha proporcionado resultados muy importantes para la topología. Se ha descrito cómo se ha creado un mecanismo de evolución entre estas dos disciplinas que resulta provechoso para el progreso de ambas. La característica central de este mecanismo consiste en que la teoría cuántica de campos topológica hace predicciones que después son constatadas desde una perspectiva matemática. En el proceso surgen nuevas formas de comprensión y nuevas generalizaciones, en algunos casos totalmente inesperadas. Los físicos teóricos que trabajan con las teorías cuánticas de campos, una teoría que no goza de una definición rigurosa, ven premiados sus esfuerzos, no sólo por la verificación experimental de sus predicciones en la física de partículas de altas energías, sino también por la confirmación de sus predicciones en el campo de la topología. Es un momento ideal para que físicos y matemáticos dirijan conjuntamente sus esfuerzos a la dotación del rigor que precisan las teorías cuánticas de campos.

Las teorías cuánticas de campos topológicas son las más simples de las teorías cuánticas de campos y, posiblemente, las más sencillas a dotar de un rigor matemático. Las dificultades inherentes a su definición rigurosa por medios analíticos pueden evitarse si se opta por la vía axiomática. Como se ha indicado, este camino fue iniciado por M. Atiyah. Aunque riguroso, este punto de vista no ha sido el que ha protagonizado los importantes avances ocurridos en los últimos años, debidos al uso de los métodos propios de las teorías cuánticas de campos. Se hace por tanto obligatorio profundizar en el desarrollo riguroso de estos métodos, tarea que implica ineludiblemente disponer de un control más firme de la integración funcional. Es tentador especular que la nueva relación descrita entre la física y las matemáticas va a proporcionar una motivación suficiente como para empezar a constatar algunos progresos en la resolución de este problema en un futuro próximo.

En los últimos años, en el contexto de la teoría cuántica de campos y de la teoría de cuerdas, se ha acumulado una enorme cantidad de información sobre las teorías gauge supersimétricas. Este progreso se debe primordialmente al avance en la comprensión de la dualidad. Esta simetría es uno de los ingredientes esenciales del análisis que ha conducido a los espectaculares resultados que se han obtenido en la teoría de Donaldson-Witten. Existe una creencia muy compartida de que los fundamentos de la dualidad se entenderán a partir de la teoría de cuerdas. El progreso en la comprensión de la teoría de cuerdas producirá, sin duda, nuevos resultados en las teorías gauge supersimétricas y, por tanto, en las teorías cuánticas de campos topológicas. De este proceso surgirán nuevos puntos de vista que pondrán de manifiesto relaciones entre invariantes topológicos que en la actualidad se asocian a teorías cuánticas de campos topológicas de dimensiones diferentes. Algunos resultados recientes, como los obtenidos por C. H. Taubes relacionando los invariantes de Seiberg-Witten (asociados a una teoría cuántica de campos topológica cuadridimensional) con los invariantes de Gromov (asociados a una bidimensional), apuntan a que, en efecto, este tipo de conexiones existen. Aunque en los últimos años se ha producido un progreso notable en la teoría de cuerdas, aún no se disponde de una formulación fundamental de la misma. Es comúnmente aceptado hoy en día que en dicha formulación la dualidad jugará un papel transcendental. Ésta es una característica muy prometedora en relación con los futuros desarrollos de las teorías cuánticas de campos topológicas. Aunque el progreso es alentador, es muy posible que se tenga que esperar hasta los albores del siglo XXI para comenzar a obtener, en el contexto de la teoría de cuerdas, resultados tan espectaculares como los obtenidos en los pasados años en el marco de las teorías cuánticas de campos topológicas.

Notas

[1] E. WITTEN, *Some geometrical applications of quantum field theory,* I. A. M. P. Congress, Swansea, 1988, edited by, Davies I., Simon B. and Truman A., Institute of Physics, (1989)