Arbor

Von Neumann y el ascenso científico de los Estados Unidos

Darío Maravall Casesnoves

Arbor CLXXV, 692 (Agosto 2003), 1409-1442 pp.

Cuando murió Poincaré en 1912, los científicos creyeron que una figura como la de Poincaré era irrepetible. Había dominado y dejado una huella profunda en muchas ramas de las Matemáticas, de la Física y de sus Filosofías. Había escrito muchos libros y artículos, todos ellos importantes; unos catorce textos dedicados al Cálculo de Probabilidades y casi todas las partes de la Física (actualmente reimpresos por Ediciones Jacques Gabay, de París) y además los tres tomos de «Los nuevos métodos de la Mecánica Celeste», reimpresos por la editorial americana Dover en francés, en cuya obra se encuentran los precedentes de la moderna Teoría del Caos.

Pero los científicos se equivocaron, porque en 1903 nació en Budapest Von Neumann, quien sería otro gigante de las Matemáticas, superespecialista y superenciclopédico. De él se puede decir que fue: un matemático puro y aplicado, un físico matemático, un economista y un ingeniero matemático, y hasta un meteorólogo.

Trabajó sobre: a) Teoría de Conjuntos; b) formalización y axiomatización de la Mecánica Cuántica y en paralelo sobre su versión del espacio abstracto de Hilbert, teoría de operadores y teoría de la medida (hoy existen las Álgebras de Von Neumann); c) teoría ergódica y teoría de la medida; d) juegos de estrategia y economía matemática; e) autómatas; f) ordenadores; g) la bomba atómica y la bomba de hidrógeno; h) la predicción del tiempo en meteorología.

El nacimiento de Von Neumann coincide con un fenómeno curioso que se ha llamado el milagro húngaro, porque en unos pocos años nacieron en Hungría varios niños que de mayores serían grandes hombres: la rareza está en que la población húngara es pequeña. Entre éstos, además de él, están Gabor, Wigner, Szilard y Teller. Los cinco fueron amigos y compañeros desde estudiantes.

De ellos, Gabor emigró a Inglaterra y los otros tres y Von Neumann emigraron a los Estados Unidos, y allí continuaron su amistad, colaboraron en muchos trabajos y contribuyeron en gran medida al ascenso científico de su nuevo país.

Gabor (1900-1979) fue profesor en Londres y obtuvo el premio Nobel de Física en 1971 por sus trabajos en holografía y en física del plasma. Wigner (1902-1995) obtuvo el premio Nobel de Física en 1963. El premio de este año se podría calificar del premio de la reconciliación, porque lo compartió con María Goeppert-Mayer (1906-1972), judía alemana exiliada en los Estados Unidos como él, y con Jensen (1907-1973), alemán que siguió en Alemania durante la guerra.

Szilard, Wigner y Teller (1934) fueron decisivos en que los Estados Unidos fabricaran la bomba atómica por sus gestiones y presiones sobre Einstein para que en 1939 escribiera una carta al presidente Roosevelt advirtiéndole del peligro de que la fabricasen los alemanes y de la necesidad de fabricarla en los Estados Unidos.

Con anterioridad a Von Neumann hubo grandes matemáticos húngaros como Bolyai (1802-1860), uno de los dos creadores de la geometría no euclídea hiperbólica. Hungría, para honrar su nombre, creó un premio mundial de Matemáticas. El primer Premio Bolyai fue concedido a Poincaré en 1905, y el segundo a Hilbert en 1910. No se concedieron más, porque después vino la guerra, la derrota y el hundimiento económico de Hungría.

Fejer (1880-1959), a quien se deben las sumas y el núcleo que llevan su nombre, que son la media en el sentido de Cesàro de las sumas parciales de las series de Fourier y de los núcleos de Dirichlet.

Los hermanos Riesz: Marcelo (1880-1969), que tomó la nacionalidad suiza, y el más conocido, Federico (1880-1956), que siguió viviendo en Hungría bajo el régimen comunista. Fue un gran matemático que introdujo en 1910 los espacios L^p en los que estableció dos convergencias débil y fuerte y el operador adjunto. En colaboración con Sz Nagy publicó un magnífico libro en francés, editado por la Academia de Ciencias de Budapest y la editorial Gauthier-Villars de París en 1952, titulado «Lecciones de Análisis Funcional», que ha tenido numerosas ediciones. Es una exposición muy completa de la integral de Lebesgue, de las ecuaciones integrales, del espacio de Hilbert y de la teoría de los operadores y de las transformaciones del mismo. Da las dos versiones del espacio de Hilbert: el de las coordenadas que es un límite del espacio euclídeo complejo de n dimensiones cuando n tiende a infinito y la suma de los cuadrados de los módulos de las coordenadas es finita; y también el espacio abstracto de Hilbert concebido por Von Neumann, y que este último utilizó para su tratamiento axiomático de la Mecánica Cuántica.

Polya (1887-1985), que fue profesor de Von Neumann en Zurich y se exilió a los Estados Unidos. Son muy buenos sus libros de problemas. Haar (1885-1933), célebre por la medida que lleva su nombre, murió en Budapest.

Lo anterior muestra que el nivel matemático de Hungría era alto antes de nacer Von Neumann. La Universidad de Budapest tenía mucho prestigio; existían otras universidades: la de Zagreb en Croacia, y la de Koloszvar (en alemán Klausenburgo) en Transilvania, que al pasar a pertenecer a Rumanía después de la Primera Guerra Mundial, fue trasladada a Szeged. En la segunda mitad del siglo XIX se fundó en Budapest una nueva Universidad Politécnica.

Cuando Nació Von Neumann, Budapest era una ciudad lujosa y alegre al estilo de Viena. Hungría pasaba por uno de los mejores momentos de su historia: había comenzado una era de industrialización y de creación de bancos húngaros, aunque todavía conservaba algunas rémoras, como la gran concentración de la propiedad de la tierra, que hacía que la situación de los campesinos fuera peor que en el occidente europeo, pero era mejor que la de la Rusia zarista. Había un gran contraste entre los campesinos y la floreciente burguesía de las ciudades.

Después de perder Austria la guerra de 1866 con Prusia, en 1867 se transformó el Imperio Austríaco en la monarquía dual Austria-Hungría, en la que el Soberano, como Emperador de Austria y como Rey de Hungría, llevaba dos números de orden distintos. Había dos gobiernos y dos parlamentos: uno en Viena y otro en Budapest, con grandes competencias para el último, que le permitía influir grandemente en la política. La autonomía de Hungría era mayor que la de los cuatro Reinos del Imperio Alemán, y que la de los Estados en Estados Unidos. Solamente las políticas exterior, militar y de hacienda eran comunes. Todas las Instituciones comunes llevaban las letras KK, iniciales en alemán de imperial y real. Hasta la fuerza pública se dividió en dos ramas: una austríaca (Landwher) y otra húngara (Honved). En 1869 se concedió una gran autonomía a Croacia dentro del reino de Hungría.

En 1871 hubo un intento de convertir la monarquía dual en trial (la tercera, Bohemia) con miras hacia una Confederación o unos Estados Unidos en Europa; pero el intento fracasó en gran parte debido a la oposición de Hungría.

El apellido Neumann es claramente alemán: significa «hombre nuevo». Es posible que algún antepasado fuera un judío austríaco o alemán.

Después del nacimiento de Von Neumann siguieron naciendo húngaros que fueron grandes matemáticos, entre los que destacan: Horváth (académico correspondiente extranjero de nuestra Academia), Halmos (exiliado en los Estados Unidos), Erdöss, Renyi, Sz Nagy, Szász, etc.

Hay dos científicos alemanes, anteriores a Von Neumann, que llevan el mismo apellido pero que no tienen parentesco con él:

Franz Neumann (1798-1895), que estableció la fórmula que da la inductancia mutua entre dos circuitos eléctricos filiformes recorridos por dos corrientes eléctricas. Fórmula muy usada en Electrotecnia.

Más conocido es Karl Neumann (1832-1925), a quien se le deben las funciones que llevan su nombre, soluciones de la ecuación diferencial de Bessel; el teorema de Neumann que da el desarrollo en serie de funciones de Bessel de una función holomorfa en el interior de un disco. El problema de Neumann de la determinación de una función armónica en un dominio de R^n, conocido el valor de la derivada normal en la frontera. Este problema, junto al de Dirichlet, que se distingue en que el dato conocido es el valor de la función en la frontera, son los dos problemas básicos de la Teoría del Potencial. Ambos han recibido un tratamiento clásico y otro moderno: el primero puede verse, por ejemplo, en la Física Matemática de Pérsico, y el segundo en el libro ya citado de Riesz y Sz Nagy. Neumann escribió un buen libro titulado «Investigaciones sobre el potencial logarítmico y newtoniano».

Von Neumann nació en el seno de una familia judía muy rica. Su padre era banquero y en 1913 adquirió un título nobiliario húngaro, equivalente al Von alemán y austríaco; permaneció fiel a la religión mosaica, que era la denominación oficial de la religión judía en Austria-Hungría. A pesar de ello, envió a su hijo al Colegio Luterano de Budapest, que era un colegio de élite, a cursar la enseñanza media.

Von Neumann fue un buen estudiante, dotado de una gran inteligencia, que al terminar los estudios secundarios ganó el premio nacional Eötvös, creado para esta clase de estudiantes; hacía falta ser un fuera de serie para ganarlo. El premio llevaba el nombre de un gran físico experimental, Eötvös (1848-1919), quien ideó una balanza de torsión en 1895, que durante muchos años fue utilizada para medir pequeñas variaciones en la intensidad y dirección de la gravedad. Pasaron muchos años hasta que se descubrieron los gravímetros de muelle, que se utilizan ahora. Eötvös comprobó con un error inferior a 10^{-9} la igualdad entre la masa inerte y la gravitatoria de un cuerpo, resultado muy importante puesto que no existe ninguna razón teórica *a priori* para que exista esta igualdad.

En 1921 Von Neumann fue a la Universidad de Berlín a estudiar Química con Fritz Haber, premio Nobel en 1918, uno de los químicos más grandes, judío y un gran patriota alemán; su personalidad humana es impresionante, y su papel en la historia de Alemania es esencial. De él me he ocupado en diversas conferencias. En Berlín fue compañero de estudios de sus amigos Wigner, Szilard y Gabor.

De Berlín pasó Zurich en 1923, donde se hizo ingeniero químico en 1925. Allí tuvo como profesor a Hermann Weyl y a Polya. Durante su época de estudiante iba a Budapest a examinarse en la Universidad en la que se doctoró en 1926 con una tesis sobre la Teoría de Conjuntos que obtuvo la calificación de *summa cum laude*.

En su formación matemática tuvieron gran influencia Erhard Schmidt y Hermann Weyl, y sobre todo Hilbert, del que los dos primeros fueron discípulos.

En Alemania germanizó su nombre, cambiando el húngaro Janos por Johan Ludwig, y empezó a utilizar el título de Von. Más tarde, en los Estados Unidos, adoptó el nombre inglés de John y siguió utilizando el Von.

Volviendo atrás en el tiempo, los diez primeros años de la vida de Von Neumann fueron un tiempo feliz para Hungría, pero después vino la guerra, la derrota y el Tratado de Trianon de 1920, en el que Hungría quedó humillada y maltrecha, tuvo que reconocerse responsable de la guerra, ceder un 67'8% de su territorio, Croacia y la parte de Eslovenia a Yugoeslavia, Eslovaquia a Checoeslovaquia, Transilvania a Rumanía y el Banato, una parte a Rumanía y otra a Yugoeslavia. Vino a perder un 59% de su población.

En marzo de 1919 Béla Kun establece en Hungría una república soviética acompañada de un terror rojo, pero en agosto de ese mismo año los contrarrevolucionarios húngaros ayudados por tropas francesas y rumanas entraron en Budapest y establecieron un reino sin rey, bajo la regencia del almirante Horthy, quien instaló un régimen dictatorial que impuso al principio un terror blanco y una reacción antisemita, que más tarde se moderó y suavizó no llegando a ser un régimen fascista.

Estos acontecimientos afectaron a la familia de Von Neumann que, como otras muchas gentes, huyeron atemorizadas, buscaron refugio en Austria o en Italia, durante el gobierno de Béla Kun. Al ser derribado éste y restaurado el orden volvieron a Budapest, donde recuperaron sus bienes y negocios. Si como dijo Ortega «yo soy yo y mi circunstancia», Von Neumann quedó marcado para toda su vida por estos hechos. En su época norteamericana fue un firme anticomunista y antirruso, partidario de las armas nucleares e incluso de la guerra preventiva, seguramente producto de lo vivido en su adolescencia.

La vida científica de Von Neumann se divide en dos períodos: el europeo, en el que publica en alemán, y el americano, en el que publica casi siempre en inglés, y en muy raras ocasiones en alemán.

Dio muchas pruebas de su precoz talento matemático y a los 18 años, en 1921, en colaboración con su profesor de bachillerato Fekete, publicó su primer artículo sobre los ceros de unos polinomios.

En 1927 es nombrado Privatdocent en la Universidad de Berlín. Trabaja con Ackermann y con Bernays, discípulos de Hilbert en Teoría de Conjuntos, Lógica y Metamatemática entendida al estilo de Hilbert como teoría de las demostraciones formalizadas. Con el primero publicó un trabajo sobre la no contradicción en Matemáticas. Con el segundo y con Gödel son artífices de la Axiomática NBG de la Teoría de Conjuntos. Zermelo en 1908 propuso un sistema de axiomas para esta teoría, que fue mejorado por Fraenkel en 1921 y 22: es la Axiomática ZF. No se sabe si ambas Axiomáticas son consistentes o no, pero sí se sabe que, o las dos son consistentes, o ninguna lo es. La NBG se caracteriza porque distingue entre clase y conjunto, de modo que un conjunto pertenece al menos a una clase; una clase no es un conjunto. Ya Burali-Forti (1861-1933) había enunciado en 1897 la primera paradoja, la cual lleva su nombre. Afirma que «la colección de los ordinales no es un conjunto». Después vinieron otras paradojas, como la de Russell (1872-1970) en 1903, de la que dio un enunciado muy técnico y con objeto de hacerlo más asequible al gran público, en 1918 dio un enunciado más accesible y pasó a denominarse «la paradoja del barbero». La finalidad de las Axiomáticas era evitar la aparición de las paradojas.

En 1928 publicó su primer trabajo sobre la Teoría de los Juegos, donde ya aparece el teorema del minimax, que será el germen del libro que publicó en inglés en 1944 con Morgestern «Teoría de Juegos y comportamiento económico», que revolucionó la Economía. En 1953 Fréchet (1878-1973) escribió una nota en inglés, donde daba cuenta de los trabajos de Borel, anteriores a los de Von Neumann, sobre la Teoría de Juegos, con una valoración muy positiva, considerando a Borel como el iniciador de la Teoría de los Juegos. Esa nota y una réplica de Von Neumann fueron publicadas ese mismo año en *Econométrica*.

Hilbert enunció en 1900 sus 23 problemas abiertos, entre ellos estaba el sexto en forma de pregunta: ¿se pueden materializar los axiomas de la Física? Von Neumann, muy influido por Hilbert, se apasionó con este teorema y en 1927, en colaboración con Hilbert y Nordheim, publicó un artículo «Sobre los fundamentos de la Mecánica Cuántica», labor que continuó Von Neumann en 1929 con otros artículos, en 1932 con su obra maestra «Los fundamentos matemáticos de la Mecánica Cuántica», todos ellos en alemán, y en 1936 en inglés, en colaboración con Birkhoff, «La lógica de la Mecánica Cuántica».

Vamos a hacer un breve resumen de las fechas claves de la Mecánica Cuántica en los años veinte, hasta su consolidación. En 1905, Einstein, en sus investigaciones sobre el efecto fotoeléctrico, establece la doble naturaleza ondulatoria y corpuscular de la luz, lo que él llamó «cuantos de luz», que luego se denominaron fotones.

En 1924, De Broglie, en su tesis doctoral, establece la doble naturaleza corpuscular y ondulatoria del electrón. En 1927, Davisson y Germer confirman experimentalmente la difracción de los electrones, y, por tanto, su naturaleza ondulatoria.

En 1925 Heisenberg formula sus relaciones de incertidumbre y se publica la memoria de Born-Heisenberg-Jordan, en la que se fundan la Mecánica de Matrices.

En 1926 Schrödinger publica sus seis memorias, en las que plantea la ecuación que lleva su nombre y funda la Mecánica Ondulatoria. La aplica a varios problemas físicos y demuestra la identidad de su Mecánica con la Mecánica de Matrices. Las seis memorias se publican en forma de libro, que se traduce al francés y al inglés.

En 1927 Dirac y Jordan publican un artículo sobre la Teoría de las Transformaciones.

En 1929 Heisenberg pronuncia una conferencia en la Universidad de Chicago con el título de «Los principios físicos de la Teoría de los Quanta», que se publica y se traduce al francés. Señala la distinción entre las ondas de espacio y tiempo y contribuye a difundir el espíritu de Copenhague de la Teoría Cuántica, marcando la diferencia con las ondas de Schrödinger, en el espacio de configuración. Trae una amplia bibliografía sobre la materia y no cita en ella a Von Neumann.

En 1930 Dirac publica el libro definitivo y más completo, «Los Principios de la Mecánica Cuántica», que alcanzará gran número de ediciones y se traducirá a varios idiomas. En él se incluyen las ecuaciones que llevan su nombre y con ellas la teoría relativista y del electrón con spin en el capítulo penúltimo. El último está dedicado al inicio de la electrodinámica cuántica, pero esta última no adquirirá su versión definitiva hasta los años cincuenta con los trabajos de Feynmann, con sus famosos diagramas, Schwinger y Tomonaga, a quienes se les concedió conjuntamente el premio Nobel en 1965. De Broglie lo consiguió en 1929, Heisenberg en 1932 y Schrödinger y Dirac conjuntamente en 1933.

En 1932 Von Neumann publica en alemán una obra magistral desde el punto de vista físico y matemático: «Los fundamentos matemáticos de la Mecánica Cuántica». Es un texto muy abstracto y elegante, pero difícil y sin aplicaciones a problemas prácticos. Utiliza el espacio abstracto de Hilbert, cuya axiomática formula. Hace una construcción deductiva de la teoría y emplea la teoría espectral de los operadores en el espacio de Hilbert. Trata con gran profundidad y rigor matemático la interpretación estadística y el problema de la medida y de los procesos de medición. Hace un estudio crítico de los formalismos usados por Heisenberg y Schrödinger, y muestra la identidad entre la Mecánica de Matrices del primero y la Mecánica Ondulatoria del segundo como dos expresiones equivalentes en el espacio abstracto de Hilbert. Schrödinger habrá demostrado anteriormente esta identidad por método distinto. Señala los inconvenientes del uso de las funciones impropias (la delta de Dirac) por considerarlo poco riguroso y que puede conducir a contradicciones. No incluye las ecuaciones de Dirac.

Se llaman variables ocultas en Mecánica Cuántica a variables de naturaleza desconocida que, si se admite su existencia, se puede explicar la aleatoriedad de las leyes y previsiones de la Mecánica Cuántica. Desde el principio de esta teoría hubo discusiones sobre la existencia de estas variables ocultas: estaban implícitas en los célebres debates entre Einstein y Bohr, en los que el primero defendió en primer lugar la inconsistencia y después la incompletitud de la Mecánica Cuántica, mientras que el segundo lo negaba. Se ha dicho que en estos debates Einstein fue vencido pero no convencido.

Von Neumann demostró matemáticamente que bajo determinados supuestos no existen variables ocultas en la Mecánica Cuántica, lo que fue aceptado por la mayoría de los científicos. Esta conclusión pasó a formar parte de la interpretación ortodoxa de Copenhague. Pero en los años cincuenta Bohm reabrió la cuestión de las variables ocultas, admitiendo supuestos distintos a los de Von Neumann. Su línea de pensamiento fue seguida por otros físicos, entre ellos De Broglie, quien publicó en 1956 un libro sobre una nueva interpretación causal y no lineal de la Mecánica Ondulatoria, con un retorno a la teoría de la doble solución y de la onda piloto, y a las ideas que había mantenido desde 1922 a 1928, en que se convirtió a la interpretación ortodoxa de la Escuela de Copenhague, que en los años cincuenta abandonaba.

Bell, en su libro «Lo decible y lo indecible en Mecánica Cuántica», publicado en 1987, y en artículos de los años sesenta y setenta, trata de nuevo de las variables ocultas y establece un teorema y unas relaciones que llevan su nombre, fuera de la interpretación de Copenhague. No están de acuerdo las tesis propuestas por Bell y por De Broglie.

En 1933 se funda el Instituto de Estudios Avanzados (IAS) de Princeton. Von Neumann es nombrado Profesor y se instala definitivamente en Norteamérica. Más tarde se nacionalizará. Antes, desde 1930, había pasado temporadas en Princeton como Profesor en la Universidad.

En Norteamérica emprende nuevas actividades en las que llegó a ser una figura sobresaliente. Recibió honores y premios; desempeñó cargos públicos como miembro de varios Comités importantes, entre otros la Comisión de Energía Atómica, cargo muy importante y de gran influencia.

En 1937 recibió el premio Bôcher de la Sociedad Matemática Americana y pronunció las conferencias Gibbs, que se encargaban cada vez a un científico de los grandes; las dedicó a la Mecánica Estadística.

En 1936-37 el IAS publicó sus «Lecciones sobre geometría continua», que se reeditó en 1960 y que ejerció una gran influencia entre los especialistas de la Teoría de Retículos (ver el libro de Szász de 1969, traducido en 1971 al inglés y al francés).

En 1944 publica con Morgestern el libro que antes hemos mencionado sobre la teoría de los juegos de estrategia y su aplicación a la Economía. Este libro despertó un gran interés y ha tenido muchas aplicaciones, entre otras al Análisis de la Decisión.

Desde 1943 participó en el desarrollo de la bomba atómica en Los Álamos bajo la dirección de Oppenheimer.

En 1945 fue nombrado Director del proyecto del ordenador del IAS, en el que permaneció hasta 1957.

En 1952 aparece «La teoría general y lógica de los autómatas».

En 1954 la Ley de Energía Nuclear crea el premio Fermi, uno de los premios más importantes, cuya primera edición se concede al propio Fermi, y la segunda a él en 1956. Posteriormente lo recibirían Wigner, Bethe, Teller, Lawrence, Seaborg y Oppenheimer. De éstos los dos primeros, el cuarto y el quinto fueron premios Nobel.

En 1958 aparece su obra póstuma: «El computador y el cerebro». Murió en 1957.

He de señalar que dentro de su enorme producción científica, por lo que él sentía más afecto y consideraba más importante estaba su contribución a la teoría ergódica, concretamente al teorema ergódico, publicado en alemán en una revista de lengua inglesa en 1932. Es un teorema muy técnico que puede consultarse en las páginas 386 y 397 del ya citado libro de Riesz y Sz Nagy en su 5ª edición de 1968 de Gautier-Villars de París.

Hay toda una leyenda sobre Von Neumann, por su extraordinaria inteligencia, su rapidez de pensamiento y de cálculo, de cómo se enteraba enseguida del contenido de un problema nuevo y de cómo resolverlo. Todo lo que decía y escribía era considerado por todos que era correcto y que nunca se equivocaba.

Antes de entrar en el imparable ascenso científico de los Estados Unidos, vamos a exponer un breve resumen de la evolución científica desde su independencia hasta la presidencia de Roosevelt.

En el siglo XVIII en Norteamérica solamente existen dos científicos de renombre universal: Franklin y el conde Rumford. Benjamin Franklin (1706-1790) tuvo un papel importante en la Guerra de la Independencia (1777-1783) y fue, entre otras cosas, el primer embajador en Francia de los Estados Unidos.

La aportación científica más importante fue en el campo de la electricidad. La electricidad estática se había convertido no sólo en objeto de la Ciencia sino también de apasionantes juegos de sociedad, desde que Von Guericke (1602-1686) había inventado la máquina de electricidad a fricción. Es el mismo que inventó la primera bomba de vacío y que realizó la experiencia de los hemisferios de Magdeburgo. En 1745 se inventó en la Universidad de Leyden el vaso de Leyden, el cual puede almacenar una gran carga eléctrica que se puede descargar. Apoyándose en estos precedentes, Franklin supuso que el rayo era un intercambio de electricidad que se producía entre las nubes y la tierra, que se comportaban como un gigantesco vaso de Leyden, lo que comprobó en 1752 volando una cometa en una noche de tormenta. Encontró el «poder de las puntas» como un medio de facilitar la descarga eléctrica, lo que le llevó a inventar el pararrayos. La otra aportación importante se basó en que desde antiguo se sabía que existían dos clases de electricidad, las producidas por el frotamiento del ámbar y del vidrio, lo que sugirió a Franklin considerar que la electricidad era un fluido imponderable que se podía presentar en exceso o en defecto, de modo que los objetos con un exceso se repelían entre sí, al igual que los objetos con un defecto, pero que un objeto con exceso y otro con defecto se atraían entre sí; ambas electricidades se neutralizaban al juntarse. Propuso llamar electricidad positiva al exceso de fluido y negativa al defecto. La hipótesis es correcta, excepto que al descubrirse el electrón y considerar la corriente eléctrica como un flujo de electrones, hoy es el defecto de electrones la electricidad positiva y el exceso la electricidad negativa, pero esto no le quita el mérito a Franklin porque el signo es puramente convencional.

Benjamin Thomson (1753-1814) es el conde Rumford. Era un norteamericano que en la Guerra de la Independencia luchó a favor de los ingleses, por lo que se exilió a Europa, donde vivió en Inglaterra y en Baviera. En este último país prestó eminentes servicios al Príncipe Elector Carlos Teodoro, que le concedió el título de conde. Organizó las fábricas de municiones y cañones, donde observó que al tornear y taladrar los cañones se producía un gran desprendimiento de calor, lo que le llevó a modificar profundamente la teoría del calor, considerándolo no un fluido imponderable sino una transformación de la energía mecánica en calor. Trató de medir el equivalente mecánico del calor, pero en su época no existían los medios para un cálculo exacto. Fue Joule (1818-1889) quien estableció sobre bases muy firmes la relación entre trabajo y calor y calculó un valor muy exacto del equivalente mecánico del calor en 1847, es decir, del número de ergios (unidad de trabajo) necesarios para producir una caloría.

Antes de Rumford hubo dos teorías erróneas del calor como un fluido imponderable. Éstas fueron la del flogisto de Stahl (1660-1734) y la del calórico de Lavoisier (1743-1794), amigo del conde Rumford. El que las teorías de base sean erróneas y no impidan conseguir resultados verdaderos y de grandísima importancia es bastante frecuente. Por ejemplo, Carnot (1786-1832) concibió su famoso ciclo y creó la Termodinámica como ciencia de los cambios de calor en trabajo y viceversa, uno de los logros intelectuales más importantes, a pesar de seguir la teoría errónea del calórico.

El conde Rumford también desempeñó cargos importantes en Inglaterra y prestó un gran servicio a este país con la fundación de la Royal Institution en 1799, en la que trabajaron y fueron presidentes de la misma Davy y Faraday. Este Centro tuvo un papel muy importante en el desarrollo de la Ciencia inglesa.

En el siglo XIX ya existen más científicos importantes en los Estados Unidos, entre los que figuran Henry y Gibbs, de primerísima categoría.

El nombre de Henry está asociado al de la Institución Smithsoniana, fundada en 1837 a expensas de la inmensa fortuna que legó a los Estados Unidos a su muerte en 1829 un inglés de nombre Smithson. El papel desempeñado por este Centro en el progreso material e intelectual ha sido muy grande.

Henry (1797-1878) dirigió esta Institución durante 32 años, desde 1846. Descubrió el principio de inducción eléctrica en agosto de 1830, pero se le adelantó en la publicación de este principio Faraday (1791-1867), que es a quien se atribuye este descubrimiento. Al revés fue lo que sucedió con el descubrimiento de la autoinducción, que hicieron independientemente Henry y Faraday, pero en este caso quien se adelantó fue Henry.

Faraday inventó el primer generador eléctrico que transforma energía mecánica en energía eléctrica y Henry inventó el primer motor eléctrico que produce trabajo consumiendo energía eléctrica.

Henry realizó otros descubrimientos importantes, entre ellos el de los relés, fundamento del telégrafo, que más tarde fue inventado por Wheatstone (1807-1875) en Inglaterra en 1837, después de haber visitado a Henry, lo que le fue de gran ayuda.

El electroimán fue inventado por un inglés, Sturgeon (1783-1850), pero era casi un juguete: podía levantar unos cuatro kilos. Henry mejoró mucho este instrumento que lo convirtió en una poderosa ayuda de la industria y de la ciencia, tanto para levantar grandes pesos de más de una tonelada, como un instrumento de gran precisión para ser usado como relés para hacer funcionar el telégrafo.

Rowland (1848-1901) fue uno de los primeros científicos norteamericanos que fueron a Alemania a ampliar estudios. Realizó un experimento sugerido por Helmholtz (1821-1894) consistente en hacer girar muy rápidamente un disco de cristal que llevaba adheridas hojas de estaño con cargas eléctricas; observó que desviaba un imán y que, por tanto, se comportaba como una corriente eléctrica.

Gibbs (1839-1903) amplió estudios en Alemania y Francia. Fue sin duda el científico más grande de los Estados Unidos anterior al siglo XX. Su memoria «Equilibrio de las substancias químicas» sigue siendo un texto muy clásico. Revolucionó la Termodinámica Química. Fue traducida al alemán y cuando Ostwald (1853-1932), premio Nobel de Química en 1909, conoció esta memoria en 1892, dijo «ahora sí que los Estados Unidos están al mismo nivel que Europa». También fue traducida enseguida al francés. Aparte de la extraordinaria labor en esta materia, en Mecánica Estadística, junto al inglés Heaviside (1850-1925) fueron los fundadores del Análisis Vectorial, considerando los vectores como la parte no escalar de los cuaternios. Se conoce como fenómeno de Gibbs los ejemplos de algunas series de Fourier que no convergen uniformemente.

Kirkwood (1814-1895) fue un astrónomo que descubrió los espacios del sistema solar que llevan su nombre, en los que no existen planetoides y dio las razones teóricas para que no existan allí.

Clark (1804-1887), astrónomo y óptico, descubrió el acompañante de Sirio e inventó el micrómetro.

Si científicamente hasta el siglo XX los Estados Unidos estaban más retrasados, no era así en el campo de inventores.

Fulton (1765-1815) inventó el barco de vapor, en 1807 construyó el *Clermont*, barco de vapor que hacía el trayecto de Nueva York a Albany por el Hudson llevando pasajeros.

Ericson (1803-1899) introdujo un gran adelanto en la navegación al inventar el propulsor de hélice en 1836, el cual sustituyó a las antiguas paletas de rueda. En 1861 construyó el acorazado *Monitor* que fue de gran importancia en la Guerra Civil, con el que quedó demostrada la superioridad de los acorazados frente a los antiguos buques de guerra.

Para el desarrollo de la agricultura americana, tan distinta de la europea por las grandes extensiones de las fincas, fueron vitales: el invento de la desmotadora de algodón por Whitney en 1793 que fue pionero en la especialización del trabajo en sus fábricas y un precursor en este aspecto de Ford, que un siglo después introdujo la producción masiva; el invento de la segadora mecánica por McCormick en 1834 y el arado de acero por Deere en 1838, que fueron decisivos en la agricultura.

La lista de inventores norteamericanos en el siglo XIX es muy grande: Colt (el revólver de seis balas en 1836); Goodyear (la vulcanización de la goma en 1839); Howe (la máquina de coser en 1846) y otros muchísimos, por lo que nos vamos a limitar a otros tres de ellos: Morse, Bell y Edison, el más grande de todos.

Morse inventó el código que lleva su nombre, usado por primera vez en 1840 para enviar un mensaje telegráfico entre Baltimore y Washington. En 1861 se unieron por telégrafo las dos costas de los Estados Unidos, antes que por ferrocarril, que lo fueron en 1869. Recibió ayuda científica de Henry.

Bell (1847-1922) patentó el teléfono en 1876, antes de ser ciudadano americano, pues se nacionalizó en 1882. Fue el invento que causó mayor sensación en la Exposición de Filadelfia de 1876 conmemorativa de la independencia de los Estados Unidos.

Y llegamos al más grande de todos, a Edison (1847-1931), que pertenece a los siglos XIX y XX. Además de ser un gran inventor, fue un gran físico. Descubrió en 1883 el efecto termoelectrónico, también llamado efecto Edison, que junto al efecto fotoeléctrico son los dos fenómenos básicos de la electrónica. Consiste en la emisión de electrones por un filamento metálico cuando se calienta. Lo descubrió accidentalmente cuando investigaba las bombillas que necesitaba para hacer posible el alumbrado eléctrico. Es uno de los más grandes descubrimientos físicos. Aunque fue propuesto para el premio Nobel en 1912, no se le concedió.

Edison patentó más de mil inventos, entre ellos el fonógrafo (gramófono), el alumbrado eléctrico, una cámara de cine, un proyector de películas, los sistemas telegráficos dúplex, cuádruplex y séxtuplex, telégrafos automáticos, teleimpresoras y también procesos de la manufactura del cemento Portland. Fundó un laboratorio, la primera firma de ingenieros asesores y la primera fábrica de electricidad en Nueva York.

También hubo en Norteamérica grandes inventores rivales de Edison, como Berliner (1851-1929), que patentó un nuevo micrófono y el disco plano que se utiliza en el gramófono. Tesla (1856-1943) y Westinghouse (1846-1914) se vieron envueltos en un conflicto con Edison que equivocadamente era partidario del uso de la corriente continua, mientras que los otros lo fueron del uso de la corriente alterna, que resultó mucho más eficaz. Westinghouse inventó también el freno de aire comprimido.

Vemos, pues, que en el siglo XIX la situación de los Estados Unidos en el aspecto tecnológico es muy buena; puede decirse que su nivel es superior al europeo. Proliferan los inventores y los inventos importantes, que facilitan su desarrollo industrial y agrícola, así como su potencia financiera. Por el contrario, en el aspecto científico el nivel es más bien bajo, inferior al europeo; se puede decir que sólo tienen dos grandes físicos de primera fila: Henry y Gibbs, y también Michelson, si se considera su obra del siglo XIX, que en parte sí lo es.

A fines del XIX y comienzos del XX mejora notablemente la situación científica en los Estados Unidos y existen cuatro científicos nacidos en el XIX que en el XX consiguieron el premio Nobel. Son: Michelson en 1909, Millikan en 1923 y Bridgman en 1946, los tres de Física, y Langmuir en 1932, de Química.

Michelson (1852-1931) fue un óptico y un astrónomo destacado, cuyo experimento más importante tuvo lugar en Alemania en 1881 y posteriormente en América en 1887. Este último experimentó en colaboración con Morley. El experimento Michelson-Morley es uno de los más famosos de la Historia de la Física. Fue esencial para abandonar la creencia en el éter y aceptar la Teoría de la Relatividad con un cambio completo en nuestras concepciones del espacio y del tiempo.

Millikan (1868-1953) ha sido uno de los más grandes físicos experimentales. Realizó experimentos hoy considerados modélicos, que le condujeron al cálculo de valores muy exactos de la carga del electrón y de la constante de Planck y a comprobar la ley de Einstein del efecto fotoeléctrico y a la no existencia de cargas eléctricas inferiores a la del electrón en la naturaleza, ya que toda carga eléctrica es igual a la de un electrón o un múltiplo de la misma. Estos experimentos son de 1906 a 1911. Posteriormente investigó la entonces misteriosa radiación procedente del espacio exterior, a la que llamó rayos cósmicos. Esta radiación había sido detectada por primera vez en Viena por Hess (1883-1964), quien obtuvo por ello el Premio Nobel de Física en 1912. Hess en 1936 huyó de Austria a Norteamérica.

En el primer tercio del siglo XX, antes de llegar Roosevelt a la presidencia, Norteamérica ocupaba ya un lugar importante en el mundo científico, aunque estaba todavía lejos de ocupar el primer puesto, pero era ya una gran potencia tecnológica, industrial, financiera y militar. Esta potencia se incrementó por sus bases en Filipinas y las Hawai, la construcción del canal de Panamá, su intervención en la Primera Guerra Mundial y su apoyo a China y el consiguiente enfrentamiento con el Japón.

Hubo muchos científicos americanos nacidos en el XIX que en el primer tercio del XX han figurado entre los más grandes. Entre los astrónomos figura Lowell, los hermanos Pickering, Shapley, Henrietta Leavitt, Trumpler, Humason, Slipher y Hubble. Todos ellos aportaron importantes contribuciones a la Astronomía, algunas extraordinariamente importantes.

Henrietta Leavitt (1868-1921), observando las nubes de Magallanes, colecciones de estrellas fuera de nuestra galaxia, en busca de cefeidas, que son unas estrellas cuya luminosidad varía periódicamente, calculó la ley que relaciona el período y la luminosidad, lo que fue el fundamento de uno de los métodos más potentes para calcular las distancias estelares cuando éstas son muy grandes.

Así como Copérnico y Galileo demostraron que la Tierra no ocupa el centro del sistema solar, Shapley (1885-1972) demostró que el Sol no ocupa el centro de nuestra galaxia, como creían los astrónomos anteriores a él.

Sobre todo ha tenido una gran importancia la obra de Hubble (1889-1953) que inició el estudio del universo fuera de nuestra galaxia, al demostrar que existen otras galaxias, que él denominó nebulosas extragalácticas. Posteriormente, Shapley las denominó galaxias, por considerarlas iguales a la nuestra (la Vía Láctea). Hoy se conocen más de miles de millones de galaxias. El hallazgo más sorprendente de Hubble es el fenómeno de la «fuga de las galaxias», e indicó en colaboración con Humason que la velocidad con que se alejan de nosotros es proporcional a la distancia. A este fenómeno se le llama efecto Hubble. Este hallazgo es una de las pruebas más importantes de que el Universo está en expansión, lo que está implícito en la aplicación de la Teoría de la Relatividad a la Cosmología. La «fuga de las galaxias» es fundamental en la Cosmología moderna y en el Big Bang.

Aparte de los premios Nobel de Física antes citados también ha habido físicos nacidos en el XIX cuya labor ha sido del XX. Entre ellos están:

Kennelly (1861-1939), que introdujo el uso de los números complejos en el estudio de la corriente alterna, pero sobre todo se hizo famoso porque predijo la existencia de una capa en la atmósfera fuertemente ionizada (la ionosfera) para poder explicar que los mensajes radiados por Marconi desde Inglaterra llegaran a Terranova no en línea recta sino siguiendo la curvatura de la Tierra por reflejarse en la ionosfera. Esta predicción la hizo en 1902, y poco tiempo después de manera independiente llegó Heaviside a la misma conclusión. A la ionosfera se la llama también capa de Kennelly-Heaviside.

Posteriormente, un inglés, Appleton (1892-1965) en 1922 calculó que la distancia aproximada de la capa de Kennelly-Heaviside a la Tierra es de unos 97 km., y que existían capas ionizadas a mayor altura (las capas de Appleton). Todas ellas reflejan las ondas de radio y producen interferencias por estar a distintas alturas.

En 1904 un inglés, Fleming, que había trabajado con Edison en los años ochenta, aprovechando el efecto Edison inventó el diodo que actúa como un rectificador que transforma la corriente alterna en continua. En 1906 un americano, De Forest (1873-1961), mejoró el invento de Fleming: introdujo un tercer electrodo, inventando el triodo, el cual actúa no sólo como rectificador sino también como amplificador. Con el triodo se desarrolló grandemente la radio y la industria electrónica. Su supremacía duró hasta que Shockley en 1948 inventó el transistor.

También hubo muchos matemáticos nacidos en el XIX cuya obra tuvo lugar en el XX antes de llegar Roosevelt a la presidencia. Figuran entre éstos:

Alexander (1888-1971), uno de los fundadores de la Topología Algebraica.

George Birkhoff (1884-1944), que investigó sobre mecánica estadística, sistemas dinámicos, ecuaciones diferenciales, el problema de los tres cuerpos y la teoría de la relatividad. Fue miembro del jurado que en 1936 concedió la primera medalla Fields. Su hijo Garret es un buen matemático que publicó en colaboración con Von Neumann, como ya hemos indicado, pero como nació en 1911 pertenece a una generación de la que no nos ocupamos ahora.

Dickson (1874-1954) entre otras cosas demostró la conmutatividad de los cuerpos finitos y dio ejemplos de cuerpos no finitos, independientemente de Wedderbund.

Veblen (1880-1960) y Eisenhart (1876-1965). El primero fue director del IAS y el segundo rector de la Universidad de Princeton. Trabajaron en colaboración sobre geometrías no riemanianas. El primero demostró correctamente en 1905 un famoso teorema que Jordan había enunciado en 1887 y lo había demostrado erróneamente. El teorema afirma: «Una curva cerrada plana divide al plano en dos partes, y dos puntos están sobre la misma parte si y sólo si pueden unirse por una línea poligonal que no corta a la curva».

Bôcher (1867-1918) tiene importantes trabajos sobre álgebra y ecuaciones diferenciales. Existe un importante premio que lleva su nombre, instituido por la Sociedad Matemática Americana, que fue concedido en 1937 a Von Neumann.

Morley (1860-1937) tiene un curioso teorema que lleva su nombre, que asocia a todo triángulo un triángulo equilátero llamado triángulo de Morley. Este teorema afirma que: «La intersección dos a dos de los pares de semirrectas que dividen los ángulos de un triángulo en tres ángulos iguales, determinan un triángulo equilátero». También tiene un teorema muy curioso, llamado de Morley-Petersen, según el cual el proceso de construir las tres perpendiculares comunes a tres rectas cualesquiera que se cruzan en el espacio, tomadas dos a dos, es finito (no indefinido).

Moore (1862-1932) investigó sobre muchos campos de las Matemáticas: teoría de números, álgebra, ecuaciones diferenciales, etc.. Fue un gran profesor y un gran maestro, y entre sus discípulos figuran: Birkhoff, Dickson y Veblen.

En el primer tercio del siglo XX vivieron en Norteamérica varios economistas de renombre universal, que destacan por el empleo de las Matemáticas:

Evans, profesor de Matemáticas puras en el Rice Institut de Texas (Houston), prestigioso centro que a principios del siglo XX publicó una importante colección de monografías breves (Tracts) en las que participaron matemáticos muy importantes: Moore, Volterra y el propio Evans. Investigó sobre la estabilidad y la dinámica de la Economía Política, aplicando las funcionales de Volterra. En 1930 publicó un buen libro: «Introducción matemática a la Economía».

Irving Fisher (1867-1947), que fue discípulo de Gibbs en Yale, reconoció que la asistencia a los seminarios de Termodinámica de Gibbs le fueron de gran utilidad para sus investigaciones económicas. Tuvo una gran influencia en la política económica y en el mundo de los negocios. Aportó importantes contribuciones a la teoría de los números índices y publicó dos libros muy notables: «Investigaciones matemáticas sobre la teoría del valor y de los precios» en 1892, traducido al francés en 1917, y «El poder adquisitivo del dinero» (la primera edición de 1911 y la segunda de 1922). Los estudiantes de economía de todos los países estudiaron su célebre ecuación, también llamada identidad: $MV=PT$, donde M es la masa monetaria, V la velocidad de circulación del dinero, P el precio medio y T el volumen de la producción.

Schumpeter, una de las máximas autoridades en Economía, calificó a Fisher y a Gibbs como las dos estrellas de la Universidad de Yale.

En enero de 1933, la proclamación casi simultánea de Roosevelt como Presidente de los Estados Unidos y de Hitler como Canciller del III Reich Alemán, tuvo por consecuencia una gran fuga de sabios de Alemania por motivos políticos o raciales y su acogida en Norteamérica, lo que inició el fuerte ascenso científico de este país. La emigración se acentúa con el Anschluss de Austria en 1938 y la incorporación de la parte alemana de Checoeslovaquia al Reich, y después la Guerra Mundial. La emigración ya no es de Alemania, sino de los países europeos ocupados. El final de la Guerra Mundial y la instauración del comunismo en los países ocupados por Rusia aumenta el número de emigrados a los Estados Unidos. Algunos fugitivos no eran judíos, pero lo eran sus esposas: tal es el caso del alemán Weyl y del italiano Fermi. Otros, como Schrödinger eran arios como sus esposas, pero abiertamente antinazis. No todos emigraron a los Estados Unidos, algunos se quedaron en Europa, como Born y Gabor en Inglaterra, Schrödinger en Irlanda, Haber y Pauli que acabaron en Suiza.

Esta fuga masiva de sabios alemanes y centroeuropeos enriqueció el potencial científico de los Estados Unidos, lo que unido a la eficaz política de Roosevelt contribuyó muchísimo a transformar los Estados Unidos en la primera potencia científica, industrial y militar y a convertir el inglés en la lengua casi universal de la Ciencia, lo que se consolidó en nuestros días con la caída del comunismo y la descomposición de Rusia, lo que produjo una nueva emigración de sabios rusos y de los países que habían sido ocupados por Rusia. Las razones de esta nueva emigración fueron distintas. También hay en nuestros días otra fuga mundial de cerebros, pero debido a las grandes oportunidades que ofrecen los Estados Unidos, tanto por los sueldos ofrecidos como por los poderosos medios facilitados para la investigación.

Al mismo tiempo que se favorecían los Estados Unidos, Alemania quedaba gravemente dañada en su potencial científico, un daño como no se había producido nunca en la Historia. Ahora bien, como el esplendor alcanzado por la Ciencia y la Cultura en Alemania en el Imperio y en la República de Weimar era inmenso, la actividad científica no quedó arruinada, porque aún fueron muchos los sabios que se quedaron en Alemania, entre ellos los premios Nobel de Física : Lenard (1905), Nernst (1906), Von Laue (1914), Planck (1918), Stark (1919), Heisenberg (1932) y también se quedaron otros físicos importantes como Sommerfeld, Von Weiszsäcker, Gerlach, Geiger, Jordan, además de los que después fueron premios Nobel: Otto Hahn y Strasmann (ambos en 1944), Bothe (1954) y Jensen (1963). También se quedaron grandes matemáticos como Hilbert, el más grande de los vivos, Blaschke, Doetsch, Schmidt, etc.

Curiosamente Hertz, premio Nobel 1925, aunque de ascendencia judía se quedó en Alemania, y al terminar la guerra estuvo de profesor en universidades rusas y de la República Democrática Alemana. Era sobrino nieto de Hertz, el que confirmó experimentalmente las ecuaciones de Maxwell al generar ondas electromagnéticas, y que también descubrió el efecto fotoeléctrico en 1887.

Hausdorff, profesor en la Universidad de Bonn, era judío y se quedó en Alemania, pero en 1942, por temor a ser internado en un campo de concentración, se suicidó. Era uno de los grandes matemáticos.

Las leyes raciales de Nuremberg permitieron, al menos en un principio, que los judíos combatientes en la Primera Guerra Mundial o que no tenían la nacionalidad alemana se quedasen. Franck, compañero de Hertz en el premio Nobel de 1925 y en el experimento que hicieron juntos por el que se les concedió, era un héroe condecorado con la Cruz de Hierro en la Primera Guerra Mundial, pero no quiso acogerse a ese privilegio y se exilió a los Estados Unidos.

Lisa Meitner, académica de la Academia de Ciencias de Berlín, a la que Einstein llamaba «nuestra Maria Curie», aunque era judía, por ser austríaca permaneció en Alemania hasta 1938 en que, a causa de la unión de Austria con Alemania, tuvo que marcharse. Injustamente no se le concedió el premio Nobel cuando se lo concedieron a Hahn y Strasmann por la desintegración del uranio y sus reacciones en cadena, que habían los tres obtenido juntos. En cambio, sí les concedieron conjuntamente a ellos el premio Fermi en Norteamérica.

Aunque la llegada de los nazis al poder supuso un gran desastre para la Ciencia y Cultura alemanas, sin embargo no las arruinó.

Von Neumann también abandonó definitivamente Alemania en 1933 y Fermi abandonó Italia en 1938, después de haber recibido el premio Nobel ese año. Fueron dos de los sabios más activos en el ascenso no sólo científico sino también militar de los Estados Unidos en su primera etapa. En una segunda etapa fue decisivo otro emigrado, Von Braun, en el éxito de los cohetes y de los satélites, aunque este último no sólo estuvo en Alemania durante la guerra, sino que fue el que dirigió la fabricación de las armas V.

La figura más llamativa de la emigración fue, sin duda alguna, Einstein. Al llegar a Estados Unidos para instalarse allí definitivamente, Langevin, un gran físico francés, dijo: «El Papa de la Física se ha mudado de casa y ahora los Estados Unidos se han convertido en el centro mundial de las ciencias naturales». Es realmente una profecía de cómo los Estados Unidos se iban a convertir en la potencia rectora de la ciencia, como consecuencia de las políticas seguidas por Hitler y Roosevelt.

Antes de 1933, con motivo de la instauración del comunismo en Rusia, hubo una emigración de sabios rusos a Norteamérica, pero en número mucho menor. Allí emigraron Zworykin, Struve, Timoshenko y Gamow, este último, en 1933, uno de los físicos más grandes.

Si bien al llegar Roosevelt a la presidencia el nivel científico de los Estados Unidos era ya muy alto, el ascenso imparable de los Estados Unidos fue consecuencia de su política, de la buena acogida del gran número de sabios europeos que llegaron huyendo en los años treinta, y del esfuerzo e interés de los propios americanos.

El final de la Segunda Guerra Mundial y la disolución de la URSS, llevaron a los Estados Unidos a ocupar el primer puesto como potencia científica y tecnológica y a que el inglés haya llegado a ser el leguaje universal de la Ciencia.

Las palabras que antes hemos citado de Langevin en 1933 resultaron proféticas: los Estados Unidos han pasado a ser la sede de la Ciencia en lugar de Alemania.

La sabiduría popular se condensa en los refranes cuando ya está sedimentada y surge de repente, en el momento oportuno, en forma de chistes.

Von Weizsäcker, desde 1984 a 1994 fue presidente de la República Federal Alemana y de la nueva república unificada. Terminó su interesante libro «Cuatro épocas» con un refrán español: «A Dios rogando y con el mazo dando», que expresa perfectamente cómo piensa que se debe actuar.

Siguiendo su ejemplo voy a concluir con dos chistes, uno alemán de después de Stalingrado, cuando los terribles bombardeos de las ciudades alemanas, que expresa cómo se dieron cuenta los alemanes del gran perjuicio que causó a Alemania la persecución de los judíos; y otro norteamericano, de los años cincuenta, que muestra cómo la gente percibió el gran beneficio que fue para los Estados Unidos acoger a los fugitivos alemanes.

Son éstos: el alemán: «Otto le dice a Fritz: vamos a perder la guerra por culpa de nuestros científicos judíos. Y Fritz le contesta: ¡si ya no tenemos científicos judíos! A lo que Otto responde: ¡pero ellos sí los tienen ahora!».

Y el americano: «¿Qué se dijeron el satélite americano y el ruso al cruzarse en su órbita? La respuesta es: *Auf wieder sehen*».

Para el lector especializado, interesado en los aspectos matemáticos de la Mecánica Cuántica, voy a incluir unas notas entresacadas de mis investigaciones sobre la materia. También aplicables al Análisis de Fourier de la Teoría de la Señal.

Nota 1ª: La función generalizada sigma

La función generalizada $\delta(x - \alpha)$ delta de Dirac es la función de densidad de probabilidad o de frecuencia (*ff*) de una variable aleatoria (v.a.) que tiene la probabilidad uno de tomar el valor $x = \alpha$. Se puede definir como el límite generalizado (G-limite) de una sucesión de funciones simétricas integrables (sumables) normalizadas $f_n(x)$ que convergen a cero para todo valor de x distinto de α. Es decir:

$$\forall x \neq \alpha \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \, ; \qquad \forall n \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, dx = 1 \tag{1}$$

lo que representamos por

$$\delta\,(x - \alpha) = \mathrm{G} - \lim_{n\to\infty} f_n(x); \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,.\delta\,(x-\alpha)\, dx = f(\alpha) \tag{2}$$

La transformada de Fourier $F(t)$ de una función $f(x)$ que representamos por $TFf(x)$ es:

$$TFf(x) = F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\,itx} f(x)\, dx \tag{3}$$

la cual es invertible:

$$f(x) = TF^{-1}F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\,-itx} F(t)\, dt \tag{4}$$

Por tanto:

$$TF\delta(x - \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\,itx}\, \delta\,(x-\alpha)\, dx = e^{it\alpha} \tag{5}$$

y:

$$\delta\ (x - \alpha) = \text{G} - \underset{n\to\infty}{lím} f_n\ (x) \Leftrightarrow \underset{n\to\infty}{lím}\ TFf_n\ (x) = e^{ita} \quad (6)$$

Se sigue que $\delta\ (x - \alpha)$ es la solución en el espacio L (de las funciones sumables) de la ecuación funcional:

$$x\psi(x) = \alpha\psi(x) \Rightarrow \psi(x) = \delta(x - \alpha) \quad (7)$$

He definido la función generalizada sigma $\sigma(x)$ como el G-límite de una sucesión de funciones sumables simétricas y normalizadas que convergen a cero para todo valor de x:

$$\forall x \quad \underset{n\to\infty}{lím}\ f_n\ (x) = 0\ ; \qquad \forall n \int_{-\infty}^{\infty} f_n\ (x)\ dx = 1 \quad (8)$$

que representamos simbólicamente por

$$\delta(x) = \text{G} - \underset{n\to\infty}{lím}\ f_n\ (x); \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \sigma\ (x)\ dx = 1 \quad (9)$$

La función $\delta(x)$ es la *ff* de una *v.a.* repartida uniformemente al azar sobre la recta real (R) y también la densidad de una masa o de una carga eléctrica repartida homogéneamente sobre una recta indefinida.

Una de las muchas representaciones de la $\delta(x)$ es el G-límite de una familia de funciones $f(x,\alpha)$ definidas por:

$$\forall\alpha{>}0 \quad f\ (x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & \text{si } |\text{x}|<\alpha \\ 0 & \text{si } |\text{x}|<\alpha \end{cases} \quad (10)$$

cuando a tiende a infinito.

La *TF* de $\delta(x)$ vale cero, porque según (10) es:

$$\underset{a\to\infty}{lím}\ \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{itx}\,dx = \underset{a\to\infty}{lím}\ \frac{\sin at}{at} = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\ \sigma\ (x)dx \quad (11)$$

Por tanto cero es la función característica *fc* de una *v.a.* repartida uniformemente al azar sobre una recta indefinida.

Se cumple que:

$$\delta_{\text{ab}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(a-b)x}\ \sigma\ (x)\ dx = \begin{cases} 1 \text{ si } a{=}b \\ 0 \text{ si } a{\neq}b \end{cases} \quad (12)$$

la igualdad superior por la (9) y la inferior por la (11).

Se sigue que:

$$\sigma(x) = \text{G - } \underset{n\to\infty}{lím}\ f_n(x) \Leftrightarrow \underset{n\to\infty}{lím}\ TFf_n(x) = 0 \qquad (13)$$

Nota 2ª: Las raíces cuadradas internas de $\delta(x - a)$ **y** $\sigma(x)$

He llamado raíces cuadradas internas *(r.c.i.)* de la $\delta(x - a)$ y $\sigma(x)$ a los G-límites de las sucesiones de funciones de cuadrado sumable (de L^2), tales que los G-límites de las sucesiones de los cuadrados de sus módulos son $\delta(x - a)$ o $\sigma(x)$. Las representaremos por el signo de la raíz cuadrada.

Los cuadrados de las *(r.c.i.)* son únicos, pero las *(r.c.i.)* de una función son infinitas.

Se cumple la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\delta(x-a).\delta(x-b)}\, dx = \delta_{ab} = \begin{cases} 1 \text{ si } a=b \\ 0 \text{ si } a\neq b \end{cases} \qquad (1)$$

y como consecuencia de ésta se cumplen también las:

$$\begin{aligned} \sqrt{\Sigma\, p_n\, \delta(x-a_n)} &= \Sigma \sqrt{p_n\, \delta(x-a_n)} \\ (\sqrt{\Sigma\, p_n\, \delta(x-a_n)})^2 &= \Sigma\, p_n\, \delta(x-a_n) \end{aligned} \qquad (2)$$

la igualdad superior por ser iguales sus integrales en virtud de (1).

Así como $\delta(x - a)$ es la solución en L de la ecuación funcional (7) de la Nota 1ª, la $\sqrt{\delta(x-a)}$ es la solución de dicha ecuación funcional en L^2.

El G-límite de la familia de funciones definidas por

$$\forall\alpha>0 \qquad f(x,a) = \begin{cases} \dfrac{e^{icx}}{\sqrt{2a}} \text{ si } |x|<\alpha \\ 0 \text{ si } |x|>\alpha \end{cases} \qquad (3)$$

cuando a tiende a infinito es $\sqrt{\sigma(x)}$ y cuando a tiende a cero es $\sqrt{\delta(x)}$.

Las funciones (3) son soluciones L^2 de la ecuación diferencial

$$\frac{d\,\psi(x)}{dt} = ic.\,\psi(x) \tag{4}$$

continuas en toda la recta real, salvo en los puntos a y $-a$ en que son discontinuas. Se sigue que todas las funciones (3) son continuas en cualquier intervalo $[-b,b]$, si a es mayor que b, y son discontinuas en cualquier intervalo $[-B,B]$ si a es menor que B.

En consecuencia, dada una sucesión de funciones $f_n(x)$ soluciones de (4) pertenecientes a L^2, si por grande que sea un intervalo centrado en el origen, son continuas en el mismo, a partir de un cierto valor de n, su G-límite es $\sqrt{\sigma(x)}$. Si, por el contrario, por pequeño que sea el intervalo centrado en el origen, son continuas en el mismo a partir de un cierto valor de n, su límite es $\sqrt{\delta(x)}$.

Un caso particular de (3) y (4) es cuando c=0, y en este caso:

$$\frac{d\,\psi(x)}{dt} = 0 \;\; y \quad \forall a>0 \;\; f(x,a) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2a}} & \text{si } |x|<\alpha \\ 0 & \text{si } |x|>\alpha \end{cases} \tag{5}$$

también su G-límite cuando a tiene a infinito es $\sqrt{\sigma(x)}$ y cuando a tiene a cero es $\sqrt{\delta(x)}$.

A veces, con objeto de hacer más simétricas la TF y la TF^{-1} en vez de las definiciones (3) y (4) de la Nota 1ª, se usa la definición

$$\text{TFf(x)} = \text{F(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int = \text{TF}^{-1}\,F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \tag{6}$$

en donde las integrales son las mismas que en (3) y (4) de la Nota 1ª; solamente se han cambiado los coeficientes 1 y $\dfrac{1}{2\pi}$ por el único coeficiente $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Aplicando esta definición de TF a (5) es

$$TF(f(x,a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\int_{-a}^{a} e^{itx}\,dx = \frac{\sin(at)}{t\sqrt{a\pi}} \tag{7}$$

y el cuadrado de su módulo es

$$\frac{sen^2(at)}{a\pi t^2} \tag{8}$$

que es una *ff*. El G-límite de la (8) cuando a tiende a infinito es $\delta(x)$ y cuando a tiende a cero es $\sigma(x)$.

De (5) y (7) se sigue que

$$TF\sqrt{\sigma(x)} = \sqrt{\delta(t)}$$
$$TF\sqrt{\delta(x)} = \sqrt{\sigma(t)} \qquad (9)$$

y también por la propiedad general de las *TF* es:

$$TF\sqrt{\delta(x-a)} = e^{ita}\sqrt{\sigma(t)} \qquad (10)$$

que es una *r.c.i.* de la , por ser éste el valor del cuadrado del módulo del segundo miembro de (10).

Si $p_1, p_2,...,p_n,...$ es una distribución de probabilidad finita o infinita, es:

$$\forall n \;\; Pn \geq 0 \quad \Sigma Pn = 1 \qquad (11)$$

y

$$TF\; \Sigma\sqrt{p_n\delta(x-a_n)} = \Sigma e^{ita_n}\sqrt{p_n\sigma(t)} \qquad (12)$$

que es una *r.c.i.* en virtud de la (1). El número de sumandos de la Σ es indistinto que sea finito o infinito.

Las funciones (3) son soluciones de (4) continuas y diferenciables en el interior del intervalo [$-a,a$] y por tanto $\sqrt{\sigma(x)}$ en sentido generalizado, en el límite (cuando a tiene a infinito) es continua y diferenciable en toda la recta real, pertenece a L^2 y es solución de (4). La exponencial que es la solución clásica de (4) no es por tanto la única solución.

Se cumple que:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\sigma(x)}\,dx = \infty \qquad \sqrt{\delta(0)} = \infty \qquad \forall a: \int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\delta(x-a)}\,dx = 0 \qquad (13)$$

La ecuación diferencial (5) aparte de tener la solución clásica $\psi(x)$ constante, tiene en sentido generalizado, como solución nueva a $\sigma(x)$ en L y $\sqrt{\sigma(x)}$ en L^2.

Así como la integral $\delta(x)$ significa físicamente una fuerza infinitamente grande que actúa durante un tiempo infinitamente pequeño produciendo un cambio en la cantidad de movimiento finito, la integral de la $\sigma(x)$ significa una fuerza infinitamente pequeña que actúa durante un tiempo infinitamente grande, produciendo un cambio finito de la cantidad de movimiento.

Si cambiamos de nombre la x por la t (el tiempo) pudiera ocurrir que un cuerpo con aceleración nula tuviera una velocidad igual a $\sigma(t)$ o a $\sqrt{\sigma(t)}$, con lo que resultaría que el cuerpo estaría en reposo (inmóvil) y sin embargo se movería.

Al principio de inercia de la Mecánica Clásica, según el cual si sobre un punto material no actúa ninguna fuerza el punto permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme, habría que añadir otras dos posibilidades, que son en un tiempo finito por grande que sea, el punto permanece en reposo, y en un tiempo infinito, el punto experimenta bruscamente un desplazamiento finito o infinito, según que su velocidad sea $\sigma(t)$ o $\sqrt{\sigma(t)}$. Paradoja física asociada a estos objetos matemáticos patológicos.

En resumen, las *TF* de cada una de todas las distribuciones de probabilidad discretas, incluida aquella en la que todas las p_n de (11) son nulas, excepto una que es igual a uno (variable cierta) son una *r.c.i.* de $\sigma(t)$. Recíprocamente, la *TF* de cada una de todas las *r.c.i.* de $\sigma(t)$ es una *r.c.i.* de una de las distribuciones de probabilidad discretas antecitadas.

Nota 3ª: Imposibilidad de que dos operadores de la Mecánica Cuántica de espectro discreto cumplan la relación de Born y las relaciones de Heisenberg

Las variables de la Mecánica Cuántica son *v.a.* que están asociadas a operadores hermíticos, lo cuales conjuntamente con la función de onda de la ecuación de Schrödinger, determinan para cada una de estas *v.a.* una función, tal que el cuadrado de su módulo es la *ff* de la *v.a.*. Esta función es la que hemos llamado *r.c.i.* de la *ff*.

Dos variables p y q se llaman conjugadas si los operadores hermíticos asociados A y B satisfacen la relación de Born (R.B):

$$\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \frac{h}{2\pi i} I \tag{1}$$

donde h es la constante de Planck e I el operador unidad. Las relaciones de incertidumbre de Heisenberg (R.I.H.) son consecuencia de (1) y se expresan por la desigualdad:

$$\sigma(p)\,\sigma(q) \geq \frac{h}{4\pi} \tag{2}$$

donde σ^2 es la varianza.

En mi libro «Fundamentos de Mecánica Cuántica» y en mi discurso de apertura del curso 1975-1976 de la Academia, así como en mi conferencia de 1975 en el cincuentenario de la Mecánica Cuántica, también publicado por la Academia, demostré que dos operadores hermíticos de espectro discreto no pueden satisfacer (1) ni tampoco cumplirse (2). Entonces hice la demostración diagonalizando una de las dos matrices hermíticas (por ser el espectro discreto) A o B; pero también se puede demostrar sin necesidad de diagonalizar, como vamos a ver ahora.

El teorema que vamos a demostrar es el siguiente: «Dadas dos matrices A y B finitas o infinitas, la suma de todos los elementos de la diagonal de la matriz es igual a cero». Por tanto no puede cumplirse (1) porque la suma de todos los elementos de la diagonal de la matriz del segundo miembro de (1) no es cero.

Se tiene que, si llamamos c_{ii} al elemento genérico de la diagonal de C, es:

$$c_{ii} = \sum a_{ij} b_{ji} - b_{ij} a_{ji} \tag{3}$$

donde la suma se extiende de 1 a n si A y B son matrices nxn y de 1 hasta infinito, si son infinitas. Vamos a demostrar que

$$\sum c_{ii} = 0 \tag{4}$$

Los elementos a y b con dos subíndices iguales en (4) solamente existen en el término que resulta de hacer $i = j$ en (3) que es nulo:

$$a_{ii}\ b_{ii} - b_{ii}\ a_{ii} = 0 \tag{5}$$

Los elementos a y b con subíndice h y k solamente existen en c_{hh} y c_{kk}. En c_{hh} son:

$$a_{hk}\ b_{kh} - b_{hk}\ a_{kh} \tag{6}$$

y en c_{kk} son:

$$a_{kh}\ b_{hk} - b_{kh}\ a_{hk} \tag{7}$$

su suma es

$$a_{hk}\ b_{kh} - b_{hk}\ a_{kh} + a_{kh}\ b_{hk} - b_{kh}\ a_{hk} = 0 \tag{8}$$

con lo que queda demostrado (4). Este resultado es independiente de que A y B sean o no hermíticas. Si las matrices son 2x2 o 3x3 se comprueba por cálculo directo.

Si A y B son hermíticas, entonces es

$$a^*_{hk} = a_{kh} \qquad b^*_{hk} = b_{kh} \tag{9}$$

donde * denota el complejo conjugado. Si llevamos los valores (9) a (6) se obtiene:

$$a_{hk} b^*_{kh} - b_{hk} a^*_{kh} = 0 \tag{10}$$

que es imaginario puro por ser la diferencia de dos complejos conjugados. En este caso todos los elementos de la diagonal de $AB–BA$ son imaginarios.

Nota 4ª: Necesidad de que las variables de la Mecánica Cuántica pertenezcan al dominio de atracción de la ley normal para que se cumplan las relaciones de incertidumbre de Heisenberg

Para que se cumplan R.I.H. de la Nota 3ª es preciso que existan las varianzas; por tanto, si éstas son infinitas (no existen entonces) como sucede con las *v.a.* que no pertenecen al dominio de atracción de la ley normal, las R.I.H. carecen de sentido. Es necesario emplear unas relaciones de incertidumbre más fuertes, que son las que vamos a exponer en la Nota 5ª.

Nota 5ª: Relaciones de incertidumbre fuertes de la Mecánica Cuántica

Lo que escribimos para una coordenada q es extensible a tres.

Sean q y p la posición y el momento de una partícula. Si $g(q)$ es la función de onda de la ecuación de Schrödinger, la *ff* de q es $|g(q)|^2$. En la ecuación (4) de la Nota 2ª hay que hacer el cambio:

$$c=\frac{2\pi i}{2} \qquad \frac{h}{2\pi i}\frac{df(p)}{dp}=f(p) \tag{1}$$

en la que h es la constante de Planck; $|f(p)|^2$ es la *ff* de p. Existen las dos relaciones

$$f(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi q}{h}}g(q)dq \tag{2}$$

y la que resulta de invertir la integral anterior que da $g(q)$ en función de $f(p)$. En las que si q y p pertenecen al dominio de atracción de la ley normal, existen sus varianzas y se cumplen las R.I.H. (2) de la Nota 3ª.

Si hacemos los cambios

$$p=\frac{h}{2}\pi p_1 \quad f\left(\frac{h}{2\pi}p_1\right)=f_1(p_1) \tag{3}$$

la (2) se escribe

$$f_1(p_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip_1 q}g(q)dq \tag{4}$$

cuya inversión da

$$g(q)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip_1 q}f_1(p_1)\,dq_1 \tag{5}$$

las (4) y (5) son como la (6) de la Nota 2ª y sus varianzas

$$\sqrt{var(q)\,var(p_1)} > \frac{1}{2} \leftrightarrow \sqrt{var(q)\,var(p)} > \frac{h}{4\pi} \tag{6}$$

la primera es propiedad de las *TF* y TF^{-1} (4) y (5) y la última es consecuencia de la primera (3).

Por tanto, si se cumplen las (2) y (5) y las varianzas de p y q son finitas, se cumplen las R.I.H. (6). Pero si una de las varianzas anteriores es infinita no se cumplen las R.I.H. (6), pero sí las (2) y (5) y sus consecuencias.

$\sqrt{\delta\,(q-a)}$ es la función de onda, después de que una medida de la posición q dé el valor a; $\delta\,(q-a)$ es la *ff* de q, $\sqrt{\sigma\left(\frac{2\pi}{h}p\right)}$ es el valor de *f(p)* y el cuadrado de su módulo $\sigma\left(\frac{2\pi}{h}p\right)$ es la *ff* de p, que es una *v.a.* repartida uniformemente al azar sobre la recta real. Recíprocamente, si la medida del momento da un valor b, la posición q es la que está repartida uniformemente al azar sobre la recta real.

Este resultado es independiente de que las *v.a.* pertenezcan o no al dominio de la ley normal y ésta es la razón por la que denomino fuerte a esta relación de incertidumbre.

Nota 6ª: Aplicación al Análisis de Fourier de la Teoría de la Señal de estas notas

Estas notas, las anteriores y las que siguen, si sustituimos q y p por t y w, siendo t la duración de la señal, $|g(w)|^2$ el contenido de energía Δt, el tiempo de dispersión de una señal y Δw el ancho de la banda espectral, el principio de incertidumbre se expresa por

$$\Delta t . \Delta w > \frac{1}{2} \tag{1}$$

Se utilizan para las *TF* las definiciones (3) y (4) de la Nota 1ª en vez de la (6) de la Nota 2ª.

Nota 7ª: Caso en que *p* ó *q* es una *v.a.* gaussiana. Transformación de la desigualdad de Heisenberg en una igualdad. Relaciones fuertes de incertidumbre

Si p o q es una *v.a.* gaussiana, la otra también lo es, y la desigualdad (6) de la Nota 5ª y (1) de la Nota 6ª se transforman en una igualdad.

Recordamos que a cada *r.c.i.* de una *ff* le corresponde una sola *ff*, mientras que a cada *ff* le corresponden infinitas *r.c.i.*; por tanto, para que el problema que nos proponemos resolver tenga una solución única, hay que partir como dato inicial de una *r.c.i* y no de una *ff*.

Sean la *r.c.i.* y la *ff*

$$\text{r.i.c.} = \frac{1}{\sigma^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{q^2}{4\sigma^2}} \qquad ff = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

la *TF* de la *r.c.i.* es por la (2) de la Nota 5ª

$$TFr.c.i. = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{2\pi i p q}{h}} r.c.i.(1) dq \tag{2}$$

si hacemos

$$p_1 = \frac{2\pi}{h} p \tag{3}$$

la (2) vale:

$$\sigma^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{4}} e^{-p_1^2 \sigma^2} \tag{4}$$

que es la *r.c.i.* de la *ff* de p_1. Su *ff* vale:

$$ff(p_1) = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-p_1^2 \frac{(2\sigma)^2}{2}} \tag{5}$$

Las varianzas de q, p_1 y p valen

$$\text{var}(q) = \sigma^2 \qquad \text{var}(p) = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \qquad \text{var}(p_1) = \frac{h^2}{16\pi^2\sigma^2} \tag{6}$$

y por tanto

$$\sqrt{\text{var}(q)\text{var}(p)} = \frac{h}{4\pi} \tag{7}$$

la desigualdad de Heisenberg se ha convertido en una igualdad, que es una relación de incertidumbre más fuerte.

La (2) de la Nota 3ª, R.I.H. no impone ninguna limitación a los valores máximos de las varianzas, solamente a los valores mínimos. Según ellas, ambas varianzas pueden crecer o decrecer a la vez, con tal de que se cumpla la antecitada fórmula (2). Por el contrario en (7) una de las varianzas determina unívocamente la otra, además si una crece la otra decrece y viceversa.

Nota 8ª: Caso en que una de las *v.a.* no pertenece al dominio de atracción de la ley normal. Modificación de las R.I.H.

En este caso la varianza de la p o de la q es infinita y hay que modificar las R.I.H..

Sean la *r.c.i.* y la *ff*:

$$r.c.i. = g(q) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}\,(a - iq)} \qquad ff = |g(q)|^2 = \frac{a}{\pi\,(a^2 + q^2)} \tag{1}$$

que es la ley de Cauchy de varianza infinita, que no pertenece al dominio de atracción de la ley normal.

La $f(p_1)$, p_1 dado por la (3) de la Nota 7ª es:

$$f(p_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip_1 q}\, g(q)dq = \sqrt{2a}\,e^{-aq} \Rightarrow |f(p_1)|^2 = 2ae^{-2aq} \tag{2}$$

cuya varianza es:

$$\mathrm{var}(p_1) = \frac{1}{2a} \Rightarrow \mathrm{var}(p) = \frac{h}{4\pi a} \Rightarrow \mathrm{var}(p)a = \frac{h}{4\pi} \tag{3}$$

El parámetro a es una medida de la dispersión de q que representamos por $D(q)$. Se tiene que

$$\mathrm{var}(p)D(q) = \frac{h}{4\pi} \tag{4}$$

que es la forma en que hay que modificar las R.I.H. al ser la varianza de q infinita.

Se tiene que:

$$a = 0 \Rightarrow |g(q)|^2 = \delta(q) \qquad a = \infty \Rightarrow |g(q)|^2 = \sigma(q) \tag{5}$$

cuanto mayor es a menor es la dispersión de p y mayor es la dispersión de q, y viceversa.

Si $|g(q,\lambda)|^2$ es una familia de *ff* que son continuas y unimodales, estando la moda en el origen, y si se cumple que

$$\lim_{\lambda\to 0} g(q,\lambda) = \sqrt{\delta(q)} \qquad \lim_{\lambda\to\infty} g(q,\lambda) = \sqrt{\sigma(q)} \tag{6}$$

por la (6) de la Nota 2ª y la (9) es

$$\lim_{\lambda\to 0} f(p,\lambda) = \sqrt{\sigma(p)} \qquad \lim_{\lambda\to\infty} f(p,\lambda) = \sqrt{\delta(p)} \tag{7}$$

Estos resultados son independientes de que q o p pertenezcan o no al dominio de atracción de la ley normal. Si no pertenece una de ellas, la q por ejemplo, existe una medida de dispersión $D(q)$ que satisface a la (4) si la varianza de p es finita.

En el último párrafo de la Nota 2ª se puede sustituir «distribución de probabilidad discreta» por «valor cierto».

Otro ejemplo interesante es si q está repartido uniformemente al azar sobre un segmento de longitud a. Si tomamos como origen de coordenadas el punto medio del segmento, la *ff* de q y una *r.c.i.* de la misma son:

$$r.c.i. = g(q) = \frac{1}{\sqrt{a}} \qquad ff = |g(q)|^2 \, \frac{1}{a} \qquad -\frac{a}{2} < q < \frac{a}{2} \tag{8}$$

la *r.c.i.* de la *ff* de p_1 (3) de la Nota 7ª es por (8)

$$f(p_1) = \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \, \frac{sen \dfrac{ap_1}{2}}{p_1} \tag{9}$$

y la *ff* es el cuadrado de (9)

$$ff(p_1) = \frac{2 \, sen^2 \dfrac{ap_1}{2}}{\pi a p_1^2} \tag{10}$$

que es una *v.a.* de varianza infinita que pertenece al dominio de atracción de la ley de Cauchy.

La varianza de q es

$$(q) = \frac{a}{2\sqrt{3}} \tag{11}$$

si tomamos como dispersión de p_1 y de p como consecuencia de la relación entre ellos es

$$D(p_1) = \frac{\sqrt{3}}{a} \Rightarrow D(p) = \frac{h\sqrt{3}}{2\pi a} \Rightarrow \qquad (q)D(p) = \frac{h}{4\pi} \tag{12}$$

que es la forma que debe tomar la relación de incertidumbre por ser infinita la varianza de p y de p_1. Lo dicho de las (1) a (7) puede decirse de las (8) a (12).

Existe una relación entre el parámetro a y el valor del máximo de (1) y de (10) que corresponde a q y a p ó p_1, el segundo.

En el movimiento browniano y en los fenómenos de difusión evoluciona en el tiempo una *ff* y en la Mecánica Cuántica evoluciona en el tiempo una *r.c.i.* de una *ff*.

Mi libro «Fundamentos de Mecánica Cuántica», editado en 1975 por el Escuela T.S. de Ingenieros Agrónomos de la Universidad Politécnica de Madrid, está agotado. Su signatura es I.S.B.N.-84-7401-060-8. Depósito legal M-17800-1979. Ha sido citado en la Nota 3ª.

También pueden consultarse los apéndices de mi «Diccionario de Matemática Moderna», Editorial Ra-Ma, 3ª edición 1994.

La 2ª edición es de 1982 y la 1ª de 1975. Ya en esta 1ª edición y en una memoria mía titulada "Espacios Aleatoriales, espacios de Hilbert y de Banach generalizados" publicada en 1968 en la Revista de la Real Academia de Ciencias, hacía notar que el espacio de Hilbert no es suficiente para encajar en él la Mecánica Cuántica, cuando las funciones de onda son singulares, como en el caso de las raíces cuadradas internas de la función sigma o de la delta de Dirac; es preciso generalizar el espacio de Hilbert. Con posterioridad fueron introducidos los espacios rigged de Hilbert, que son también una generalización en otro sentido del espacio de Hilbert, que son necesarios para poder aplicarlos a otras teorías físicas.