Von Neumann y la mecánica cuántica: ¿Finitud o infinitud del espacio cuántico?

Baltasar Rodríguez-Salinas

Arbor CLXXV, 692 (Agosto 2003), 1443-1453 pp.

De todos es conocida la importancia de Von Neumann en los Fundamentos de la Mecáncia Cuántica. En ella son esenciales los dispositivos físicos que actúan como máquinas Turing con las que se introduce la computabilidad, pero también en ella interviene la mente del hombre que actúa computablemente con menos potencia que las máquinas Turing, pero que también puede actuar no computablemente. Lo primero conduce, como veremos, a que el Universo Cuántico es un conjunto finito, y lo segundo que es o parece ser un conjunto infinito. Von Neumann, con los espacios de Hilbert separables de dimensión infinita, se pronuncia o parece pronunciarse por la propiedad de que el Universo Cuántico es infinito. Pero nosotros vamos a demostrar, teniendo en cuenta que la velocidad actual de la expansión del Universo es mayor que la velocidad de la luz, que hay un final de los tiempos y, como consecuencia, que el Universo es un conjunto finito. Esto no significa una contradicción importante porque en la Mecánica Cuántica se puede sustituir una teoría por otra observacionalmente equivalente a ella.

Los físicos, por razones experimentales y teóricas, piensan que existen partículas elementales, constituyentes de los elementos del Universo Físico o Cuántico $\mathbf{U}$, de donde, como la velocidad de la luz c es finita, se sigue que la parte $\mathbf{U}(t)$ del Universo visible en cada instante t es un conjunto finito. El modelo más sencillo de la $\mathbf{U}$ es el conjunto constituido por las partículas elementales para el cual reservaremos el nombre de Universo Cuántico.

Otro modelo más completo de **U** que consideraremos, es el formado por la materia sumergida en el cono $r^2=x^2+y^2+z^2\leq c^2t^2$, con vértice el big bang de la Relatividad Especial. Es claro, que si la velocidad de expansión del Universo **U**, formado por la materia, fuese igual a la velocidad c de la luz, entonces **U** podría representarse por el cono $r\leq ct$. Pero esto no es así, porque la velocidad actual v_0 de expansión del Universo, es decir, de **U**, es mayor que $c:v_0/c=3.33$. Entonces, **U** puede representarse por un cono $r\leq\varphi(ct)\leq ct$, donde φ es una cierta función tal que $\varphi'(0)\leq 1$ y $\varphi'(ct_0)=v_0/c$ para el instante actual t_0. La razón de ello es que **U** está contenido en un cono de revolución circunscrito a él de dicho tipo, con eje $r=0$, ya que la parte **U** (t) del Universo visible en cada instante t es un conjunto finito. En efecto, como **U** (t) es un conjunto finito, existe una bola circunscrita a él con centro en $(0,0,0,t)$ y, por tanto, la unión de las bolas $B(t)$ es un cono circunscrito C: $r\leq\varphi(ct)$ al modelo **U** del Universo formado por la materia sumergida en el cono $r\leq ct$ de la Relatividad Especial con vértice el big bang, de modo que si se sale C del cono $r\leq ct$ también se sale el verdadero Universo. Pero también, de una manera más grosera, se llega a la misma conclusión porque se puede suponer que **U** es un cono de revolución según una suposición predicha por A. Friedmann[1] (1922) y encontrada por E. Hubble a la que dieron una confirmación extraordinariamente precisa, en 1965, A. Penzias y R. Wilson, galardonados con el premio Nobel en 1978. Hubble también probó en 1929 que, cuanto más lejos está una galaxia, a mayor velocidad se aleja de nosotros, de donde se sigue que la derivada $\varphi'=v/c$ es una función creciente de t (véase [1]). Nos hemos dejado en el tintero una cosa que es importante, y es que se puede suponer **U** sumergido en el cono $r\leq ct$ de la Relatividad Especial, hecho que se comprueba porque la luz se puede propagar entre este cono y el cono $r\leq\varphi(ct)$ del Universo porque la masa de los fotones es igual a cero, de modo que si $r\leq\varphi(ct)$ se sale del cono $r\leq\varphi(ct)$ también se sale del verdadero Universo **U**.

Entonces, por la monotonía manifiesta de φ', resulta $\varphi'(ct)>v_0/c$ para $t\geq t_0$ y, por tanto,

$$ct \geq \varphi(\mathrm{ct}) \geq \varphi(\mathrm{ct}_0)+v_0(t-t_0)$$

y

$$t \leq \frac{v_0 t_0 - \varphi(ct_0)}{v_0 - c} = t_0 + \frac{ct_0 - \varphi(ct_0)}{v_0 - c}$$

para $t\geq t_0$, de donde se sigue la compacidad de **U** y la existencia del final Ω en dualidad con el principio A, verificándose $\varphi(ct)=ct$ para el tiempo final $t=\tau(\Omega)$ (o Ω). Estando, pues, **U** formado por todos los puntos (x,y,z,t) tales que $r \leq \varphi(ct)$ y $0 \leq t \leq \tau(\Omega)$, y el final propio Ω igual al subconjunto de **U** formado por los puntos con $t=\tau(\Omega)$. Por tanto, existe un final Ω del Universo **U** y un tiempo final $\tau(\Omega)$.

Finalmente, señalamos que lo que hemos obtenido para la Relatividad Especial vale para la Relatividad General, porque los modelos de ambas son homeomorfos, y también de manera general para toda Teoría Física que tenga un modelo homeomorfo a uno de los modelos anteriores. En resumidas cuentas, lo mismo que el big bang es un indicador del principio A del Universo, la expansión de él es un indicador de su final Ω, el cual propiamente está formado según [6], por todos los elementos E-minimales x de **U**, esto es, tales que no existe ningún y $\in$ **U** que verfique yEx, siendo E la relación de causalidad definida por los correspondientes conos de propagación de la luz con vértices en las causas. Por tanto, dichos elementos E-minimales de **U** no emitirán rayos de luz. Esto confirma la profecía del final de los tiempos de Jesucristo, que además dijo: «Inmediatamente después de la tribulación de aquellos días, el sol se oscurecerá, la luna no dará resplandor, las estrellas caerán del cielo, y las fuerzas de los cielos serán sacudidas» (Mt. 24, 29), y una cosa análoga consta en (Mc. 13, 24).

Se puede objetar que todo esto se basa en aproximaciones del Universo, pero esto tiene una fulminante contestación por la forma primera que hemos construido el cono de revolución circunscrito al verdadero Universo **U** y porque el cociente v_0/c es aproximadamente igual a 3.33, bastante mayor que 1.

Es desde luego sorprendente que, basándome en que el Mesías sería Luz de Verdad, conjeturé sin ninguna pretensión que el instante del nacimiento del Mesías estaría determinado por la propiedad de que en ese instante la velocidad de expansión del Universo es igual a la velocidad de la luz. Y, en efecto, por la definición de la velocidad de expansión v_0 del Universo en el instante t, resulta $\varphi'(ct)=v_0/c$. Es claro que por la propiedad de la derivada φ' de pasar por todos los valores intermedios, existe un tiempo $t_0<\Omega$ tal que $v_0=c$. Y fácilmente se sigue de la desigualdad anterior, para $t=\tau(\Omega)$, y un tiempo «actual» comprendido entre t_0 y Ω, que hay esperanza de la Segunda Venida de Cristo, mientras que para $t<t_0$, siendo la velocidad de expansión $v(t)<c$, no se puede asegurar ni siquiera el final de los tiempos ni, por tanto, la Segunda Venida de Cristo. Entonces, Cristo nació en el instante t_0 y $v_0=c$.

Ahora vamos a demostrar que el Universo Cuántico **U** es un conjunto finito. Desde luego, como ya hemos dicho, el Universo Físico visible en cada instante es un conjunto finito por ser la velocidad de la luz finita. Sea $\mathbf{U}_n$ el Universo Físico visible en el n-ésimo año luz, entonces $\mathbf{U}_n$ es un conjunto finito y, por tanto, $\mathbf{U} = \bigcup_{n \in N} \mathbf{U}_n$ es contable.

La primera cuestión que nos planteamos es determinar qué subconjuntos de $\mathbf{U}$ se deben incluir en su estructura generativa, porque los subconjuntos infinitos de $\mathbf{U}$ no son observables en ningún n-ésimo año luz, sino solamente son «aproximaciones» de observaciones. Por el contrario, es claro que todos los subconjuntos finitos están incluidos en dicha estructura, así como también todo elemento del espacio lineal engendrado por las funciones características de los elementos de $\mathbf{U}$. Sea, pues, E_n el espacio lineal engendrado por las funciones características de los elementos de $\mathbf{U}_n$, y $E = \bigcup_{n \in N} E_n$ dotado de la correspondiente topología inductiva: $E = \lim_{n \to \infty} E_n$. Entonces, si existe un subconjunto infinito A de E, perteneciente a la estructura generativa de $\mathbf{U}$ y E, existiría una sucesión de Cauchy no acotada en E, en contradicción con que E es un espacio completo. Por tanto, $\mathbf{U}$ pertenece a su correspondiente estructura generativa si y sólo si él es un conjunto finito.

Al mismo resultado se llega en el sentido del Cálculo de Probabilidades, tan ligado a la Mecánica Cuántica, porque siendo sólo observables los subconjuntos A de $\mathbf{U}$ que están contenidos en algún $\mathbf{U}_n$, dependiente de A, si μ es una medida de probabilidad puramente atómica sobre Σ=pp($\mathbf{U}$) tal que $\mu(\{A\})$ es la probabilidad para que el subconjunto A de $\mathbf{U}$ sea el universo final, resulta $\mu([A])=0$ para todo subconjunto infinito A de $\mathbf{U}$ y, por tanto, $\mu(S)=0$ para toda unión S de dichos conjuntos $\{A\}$ porque el cardinal de pp(N) es no medible y $\mathbf{U}$ es contable. A la misma conclusión se llega sin suponer μ puramente atómica si el cardinal de pp(N) es de medida cero, lo cual lo hemos probado en [4] y [5]. Entonces, si $\mathcal{A}$ es el conjunto de las partes finitas de $\mathbf{U}$, se tiene $\sum_{A \in \mathcal{A}} \mu(A) = 1$ y, por tanto, existe al menos un conjunto {A}, $A \in \mathcal{A}$, de máxima probabilidad positiva, de donde se sigue una contradicción si suponemos $\mathbf{U}$ infinito.

No obstante, si $\mathbf{U}$ es numerable, una estructura generativa importante de $\mathbf{U}$ viene dada por una sucesión (T_n) de máquinas Turing [2] en la que los conjuntos de elementos de $\mathbf{U}$ «bien definidos» son los computables o algorítmicos, esto es, son los conjuntos recursivos enumerables [3]. Entonces, como el cardinal del conjunto P(**U**) de las partes de **U** es el continuo, el conjunto V de las partes no computables de **U** tiene también por cardinal el continuo, puesto que su complementario P(**U**)\V es numerable [4], en contra de la realidad de P(**U**). Entonces existe una parte A de **U** no computable y, por tanto, las funciones características χ_A y χ_U son no computables (Turing) en contra de la realidad y computabilidad de **U**, de donde por esta contradicción resulta que **U** es un conjunto finito.

Esta demostración no es concluyente para los que aún, siendo **U** numerable, admiten que todos los subconjuntos infinitos A de **U** son reales. Sin embargo esto es consecuencia de que el modelo utilizado ahora es muy pobre, pero si se utiliza el modelo utilizado en primer lugar, en el que se hace intervenir la expansión del universo **U**, resulta que éste es computable. En efecto, entonces, si **U** fuese infinito, no existiría el final de los tiempos, en contradicción de la demostración concluyente dada en primer lugar y, por tanto, no puede ser **U** no computable. No obstante, continuaremos profundizando sin utilizar la expansión del Universo y suponiendo **U** infinito.

Para ver como trabajan los físicos, recordamos ahora la ecuación de ondas en relación con sus propiedades de ***computabilidad***. En efecto, Marian Boykan Pour-El e Ian Richards han podido demostrar que incluso si las soluciones de la ecuación de ondas se comportan de modo ***determinista***, en el sentido ordinario, existen datos iniciales ***computables***, de cierto tipo «peculiar», con la propiedad de que, para un tiempo posterior computable, el valor determinado del campo resulta ser ***no computable***. Sin embargo, aunque este resultado es ciertamente sorprendente y matemáticamente relevante, su tipo «peculiar» de datos iniciales no es de «variación suave» como se requiere normalmente para un campo físico razonable. En realidad, Pour-El y Richards demuestran que la no-computabilidad ***no puede aparecer*** para la ecuación de ondas si rechazamos este tipo de campos. En cualquier caso, sería difícil ver cómo un «dispositivo» físico y quizá un cerebro humano pudiera hacer uso de tal «no-computabilidad» [3]. Así con este espíritu queda identificada la «realidad del Universo **U**» y la «realidad en **U** de la Teoría de la Computabilidad»' y eliminada la posibilidad de que **U** sea no computable. Pero la mente del hombre puede funcionar computablemente y no computablemente, ya que puede superar a los algoritmos en algunos casos.

¿Puede una teoría de variables-ocultas ser consistente con todos los hechos observacionales en física cuántica? Parecía que la respuesta era sí, pero sólo si la teoría es esencialmente ***no-local*** en el sentido que los parámetros ocultos deben poder afectar instantáneamente a regiones del sistema arbitrariamente lejanas, pero esto queda desechado por el hecho de que **U** es un conjunto finito. Esto le hubiese gustado a Einstein, debido particularmente a que así desaparecen las dificultades que surgían para la Relatividad Especial, que así dan un serio argumento contra la afirmación de que **U** es un conjunto infinito. Y es de destacar que, siendo **U** un conjunto finito, queda establecida de una forma rigurosa y manejable con el auxilio de las máquinas de cálculo la ***realidad física objetiva*** en la que creía Einstein.

Es claro, que una cosa es que en la Mecánica Cuántica se puede teorizar porque algunas cosas salgan bien pensando que **U** es infinito, y otra que la realidad se imponga y resulte, como hemos visto, **U** finito, pero tan grande que parezca ser infinito de forma que la aproximación más sencilla de él, para el hombre, es un conjunto infinito. Y no se puede olvidar que la ecuación de Schrödinger, nacida de un disparate no corregido, exige para aceptar su validez en todos los casos, que la experiencia lo justifique, y dicho final sólo se puede experimentar cuando llegue, por lo que debe ser **U** finito, lo cual se puede comprobar; mientras que nunca se podría comprobar que **U** es infinito, por lo que según el principio anterior no se debería aceptar esta solución.

Y es que por desgracia, diferentes teóricos tienden a tener puntos de vista muy diferentes (aunque observacionalmente equivalentes) sobre la ***realidad*** de la imagen del mundo según la teoría cuántica existente. Muchos físicos, encabezados por Niels Bohr, dirán que no hay imagen objetiva en absoluto. La teoría cuántica, según esta concepción, proporciona simplemente un procedimiento de cálculo, y no intenta describir el mundo como realmente «es». Por otra parte, el estado cuántico de una manera más positiva puede atribuir ***realidad física*** a la descripción cuántica. Así la ecuación de Schrödinger proporciona una evolución temporal completamente determinista para este estado; pero hay algo muy singular acerca de la relación entre el estado cuántico en su evolución temporal y el comportamiento real del mundo físico que se observa tiene lugar. Así, si el universo **U** fuese infinito, una «medida» en un lugar puede aparentemente provocar que ocurra un «salto» en una región lejana. También encontraríamos un fenómeno extraño: a veces dos rutas alternativas, que un objeto puede recorrer sin problemas si cualquiera de ellas se atraviesa por separado, se cancelan completamente entre sí cuando ambas están simultáneamente permitidas, de modo que en este último caso ninguna de ellas puede ser atravesada. Además puede ocurrir que una partícula parezca estar a la vez en dos lugares diferentes, lo cual justifica y aclara que por el «salto» cuántico el universo **U**, que es un conjunto finito, se pueda convertir y parezca ser un conjunto infinito en la teoría cuántica, en ciertas ocasiones (véase, [3]). Y es que en ello coinciden las Matemáticas y la Teoría de la Relatividad, sólo discrepa o parece discrepar la Mecánica Cuántica. Lo cual prueba la importancia de mirar la Ciencia desde un punto de vista global, partiendo de los diversos puntos de vista locales. Concretamente, la realidad en las Matemáticas está enmarcada por el Cálculo de Probabilidades, la Teoría de la Computabilidad y por todo conjunto $P_\varphi(\mathbf{U})$ de las partes finitas de un conjunto contable **U**, y en la realidad de la Física se distinguen la Teoría de la Relatividad Especial y General de Einstein. Y la Teología Cristiana ocupando su lugar entre las demás ciencias, aunque sea en último lugar, dice que todos deben expresar siempre la verdad según su punto de vista y que ella no olvida la profecía de Cristo sobre el fin del mundo y espera gozosamente su Segunda Venida diciendo: "Ven, Señor Jesús". A propósito de esto recordamos que, según el Apocalipsis, Cristo dijo: "Yo soy el Alfa y la Omega, el Primero y el Último, el Principio y el Fin"; de donde se sigue que Ω no puede significar nunca la muerte, sino la Vida, iluminada por la Luz de la Verdad.

Por otra parte, es claro que los encontrados puntos de vista existentes en la teoría cuántica quitan valor a sus conclusiones. No obstante, pudiera ser la más acertada conclusión la que afirma «que **U** parece ser un conjunto infinito» por su atractiva belleza y por reflejar el estado general de duda y comportamiento en dicha visión ante la realidad, y porque «implícitamente» reconoce la verdad de que **U** es un conjunto finito. Por todo esto, aunque desde el punto de vista global digo que el universo es un conjunto finito, ello es coherente con que diga desde el punto de vista de la Mecánica Cuántica actual que «**U** parece ser un conjunto infinito».

La razón del extraño comportamiento de la Mecánica Cuántica ante la realidad está en que sus postulados se introducen —creo contra su espíritu— los conjuntos infinitos como, por ejemplo, los conjuntos numerables de los valores propios de muchos operadores autoadjuntos, pero la verdad es que sólo son útiles y se utilizan un número finito de ellos, pero lo grave es que la teoría en que se basa eso es inconsistente con la expansión del Universo, ya que de ésta se sigue que **U** es un conjunto finito; pero esto se arregla en la práctica tomando en todo conjunto infinito un subconjunto finito conveniente. Esta inconsistencia sería terrible en las Matemáticas pero no en la Mecánica Cuántica en donde una teoría se puede substituir por otra observacionalmente equivalente. Así, si Λ es una sucesión de los autovalores de un operador, existe un conjunto $\mathbf{U}_n$ tal que la suma de sus probabilidades de los autovalores de los elementos no contenidos a $\mathbf{U}_n$ es despreciable y desde este aspecto se puede considerar $\mathbf{U}_n$ igual al Universo. Por otra parte, el extraño suceso de que una partícula puede estar a la vez en dos lugares diferentes, en analogía con la paradoja de Banach-Tarski, tiene su explicación en la existencia de partículas en un estado no medible, lo cual es una explicación científica en contraposición de atribuir a las partículas una extraña «sabiduría» o «magia». Análogamente, consideremos un sistema físico que consta de dos subsistemas A y B, tales que la ***elección de la medida*** en el sistema A no se decide hasta que A y B estén muy separados. Entonces, el comportamiento de B parece estar influido instantáneamente por esta misma elección. Este tipo «EPR» de experimento mental aparentemente paradójico se debe a A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen (1935). También se debe a J. S. Bell un teorema famoso del que se sigue el hecho de que ninguna descripción local «realista» (v.g. de variables ocultas, o de «tipo clásico») pueda dar probabilidades cuánticas correctas.

Se impone, pues, el estudio de las medidas finitas sobre una clase A de subconjuntos finitos A_n de $\mathbf{U}$, reservando el nombre de ***medida cuántica*** si todo subconjunto finito $\mathbf{U}$ de $\mathbf{U}$ está contenido en un conjunto $A \in$ A y μ es computable (Turing), esta hipótesis es muy natural porque en las observaciones se utilizan dispositivos físicos que funcionan como máquinas Turing. Entonces, sea $\mathbf{U}_0 = \bigcup \mathsf{A}$ la unión de todos los subconjuntos $A \in \mathsf{A}$, en cuyo caso

$$\mu^*(B) = \inf \{\mu(A) : B \subseteq A \in \mathsf{A}\} = +\infty$$

si B no está contenido en $\mathbf{U}_0$, y $\mu^*(\mathbf{U}_n) < +\infty$ para todo n; y resulta $\mathbf{U} = \bigcup_{n \in N} U_n \subseteq \mathbf{U}_0$ y, por tanto, $\mathbf{U} = \bigcup_{n \in N} A = \mathbf{U}_0$; de donde poniendo $A'_n = \bigcup_{k < n} A_k$ se sigue, si $\mathbf{U}$ es un conjunto infinito, que $\{\mu(A'_n) : n \in \mathrm{N}\}$ es un conjunto infinito puesto que $\mu(A_n) > 0$ para todo n si μ es la masa y, por tanto, existe un subconjunto $\{\mu(A'_n) : n \in \mathrm{N}\}$ no computable [5]. Luego el Universo $\mathbf{U}$ es un conjunto finito ¡a no ser que la masa no esté bien definida!, y la Mecánica Cuántica es una ciencia de observación. Entonces, toda medida cuántica μ es finita y trivialmente σ-aditiva.

Ahora estamos en condición de probar EPR. Con las notaciones usadas, si se elige μ en el sistema A y tomamos el sistema B suficientemente lejano de modo que $A \cap B=\emptyset$ o $P(\mathbf{U})\cap B=\emptyset$, entonces el comportamiento no μ–medible de B está influido instantáneamente por la elección de μ y queda explicado EPR. Pero el experimento es una ilusión si B no está contenido en **U**, que queda explicado porque la mente humana puede funcionar no computablemente en los experimentos mentales. Entonces, el «Universo Cuántico mental» puede ser un conjunto infinito.

Si μ es una medida cuántica, los «saltos cuánticos» no son otra cosa que los incrementos $\Delta\mu(A)=\mu^*(A)-\mu_*(A)$ producidos por los «paquetes cuánticos»:

$$p(A) = \{X : p_*(A) \subseteq X \subseteq p^*(A)\},$$

donde $p_*(A)$ es el mayor conjunto μ- medible contenido en A y $p^*(A)$ es el menor conjunto μ–medible que contiene a A y, por tanto, $\mu_*(A)=\mu(p_*(A))$ y $\mu^*(A)=\mu(p^*(A)$.

Obsérvese que el Universo **U** es un espacio compacto Hausdorff totalmente disconexo de los utilizados por M. H. Stone en su representación de las álgebras de Boole.

Referencias

[1] HAWKING, S. W., *Historia del tiempo*. Edit. Crítica. Barcelona, 1987.
[2] JECH, T., *Set Theory*. Academic Press, Inc. San Diego, 1978.
[3] PENROSE, R., *La Nueva Mente del Emperador*. Mandori, Madrid, 1991.
[4] RODRÍGUEZ-SALINAS, B., *Every cardinal has measure zero. CH is a valid formula*. En vías de publicación.
[5] RODRÍGUEZ-SALINAS, B., *The Axiom of Constructibility of Gödel V=L is a valid formula*. En vías de publicación.
[6] RODRÍGUEZ-SALINAS, B., *Sobre los big bangs, el principio y el final de los tiempos del Universo. Aceptado en la Rev. R. Acad. Cienc. Exact., Fís. Nat.*
[7] SANCHO San ROMÁN, J., *Lógica Matemática y Computabilidad*. Ed. Díaz de Santos, S.A., Madrid, 1990.

Notas

[1] Según ella el Universo parece ser aproximadamente el mismo en cualquier dirección, con tal que se analice a gran escala, comparada con la distancia entre galaxias, y se ignoren las diferencias a pequeña escala [1]

[2] Si **U'** es un conjunto ordenado (**U**,<') semejante a N, para cada máquina Turing T_n sobre N se puede construir, mediante la semejanza dada, una máquina Turing sobre **U'**.

[3] Conservamos las notaciones de [3] de modo que un conjunto computable es positivamente decidible en [7] y una función computable es computable Turing en [7].

[4] Téngase en cuenta que el conjunto de las partes computables de Nes numerable.

[5] Esto resulta inmediatamente también de que el rango de toda función computable o recursiva es un conjunto finito. Además, hacemos notar, que sólo pueden ser computables un conjunto contable de ordenaciones naturales de A y de los valores de la masa.